Introdução à 5^a Sinfonia de Beethoven para engenharia acústica.

Nilson Evilásio de Souza Filho [1]

[1]E-mail: nilson.evilasio@eac.ufsm.br.

Sumário

Introdução à 5^a Sinfonia de Beethoven para engenharia acústica

RESUMO

O objetivo destas notas de aula é fazer com que alunos de engenharia compreendam a importância de uma função senoidal e sua relação com os fenômenos vibratórios, usar tal função para sintetizar notas musicais no computador e consequentemente fazer música. Embora não seja cobrado agora como determinar as equações diferenciais que regem os fenômenos oscilatórios e ondulatórios, é meu dever expor as equações do oscilador harmônico e da equação de onda com o formalismo matemático adequado e deixar claro que estamos interessados, por enquanto, apenas na função matemática $[cos(kx-vt)]$ ou $[sin(\omega_0 t)]$, ou nas soluções da equação de onda e do oscilador harmônico. Para os diletantes, é apresentado os rudimentos de música necessários e suficientes para o entendimento da 5^a Sinfonia de Beethoven. A meta final é utilizar os princípios de oscilações e ondas na sintetização dos 628 compassos, de cada instrumento, da 5^a Sinfonia.

Palavras-chave: Oscilações, Ondas, Série de Fourier, Síntese Sonora, Música.

1 Introdução

Ludwig van Beethoven foi um compositor alemão, do período de transição entre o Classicismo (século XVIII) e o Romantismo (século XIX). É considerado um dos pilares da música ocidental, pelo incontestável desenvolvimento, tanto da linguagem como do conteúdo musical de suas obras, e permanece como um dos compositores mais respeitados e mais influentes de todos os tempos.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os países ocupados pela Alemanha eram proibídos de ouvir outras rádios que não as indicadas pelo III Reich. Todavia, muitas pessoas desafiavam a proibição para escutar a BBC de Londres, que durante a guerra usou como prefixo as notas iniciais da 5^a Sinfonia de Beethoven, cujas notas, três curtas e uma longa, correspondem a letra "V", de vitória, em código morse. Nesta, como em outras ocasiões, a liberdade foi associada a Beethoven.

O resumo de sua obra é a liberdade, observam os críticos, *a liberdade política, a liberdade artística do indivíduo, sua liberdade de escolha, de credo e a liberdade individual em todos os aspectos da vida.* Como introdução a sua vasta obra, vamos um pouco além- daquela música que anuncia o caminhão de gás (*Pour Elise*, op. 59). Uma boa introdução ao gênio são as sinfonias. A 5^a Sinfonia, pode ser uma experiência estética inesquecível, ainda mais sob uma boa batuta.

A peça que vamos discutir, foi composta por Beethoven mais de um século após a formulação da mecânica newtoniana. A obra de Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, é considerada uma das mais influentes na história da ciência.

Esta obra descreve a lei da gravitação universal, as leis fundamentais da mecânica que fundamentam a cinemática e a dinâmica.

A dinâmica é o estudo do movimento e suas causas. Todo movimento é causado por uma força que atua num sistema onde ocorrem transformações de Energia. Por isso, a maior parte do estudo da dinâmica é resumida nas Leis de Newton e em Leis de Conservação de Energia. Fisicamente, força representa uma interação capaz de produzir equilíbrio, variação de velocidade e deformação. O seu efeito depende da direção e do sentido em que é aplicada, logo a força requer uma representação vetorial $\vec{F}$ que no Sistema Internacional de unidades é dado em Newtons (N).

As três leis de Newton, apresentadas pela primeira vez na obra: Philosophie Naturalis Principia Mathematica, publicada em 1687, serão enunciadas e em seguida, discutidas brevemente.

1^a **Lei de Newton:**

Um ponto material permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU) se nenhuma força resultante atuar sobre ele.

2^a **Lei de Newton:**

A variação de movimento de um corpo (de massa m) é proporcional (e tem mesmo sentido) a força resultante que age sobre esse corpo.

3^a **Lei de Newton:**

A toda ação há uma reação de mesma intensidade e de sentido contrário.

A 1^a Lei dá a idéia de referencial inercial, no qual um corpo não possui variação de movimento $\dot{\vec{v}} = 0$, quando livre da ação de forças. Ela também é conhecida como Princípio da Inércia, formulada primeiramente por Galileu.

Um ponto importante na compreensão da 1^a Lei é que ela não pode ser válida em qualquer referencial. Os referenciais em que é válida chamam-se referenciais inerciais. Uma das implicações da 1^a Lei é que qualquer variação de velocidade de um corpo (em módulo ou em direção) em relação a um referencial inercial, ou seja, qualquer aceleração deve estar associada à ação de forças. Isso sugere procurar uma relação mais precisa entre força e aceleração.

Experiências simples mostram que objetos diferentes adquirem acelerações diferentes quando submetidos à mesma força. Essas acelerações são inversamente proporcionais a uma propriedade do corpo caracterizada por sua resposta à força aplicada, essa propriedade mede a quantidade de matéria do objeto e é denominada massa inercial (dada em kg). Ou seja, massa é um coeficiente que distingue uma partícula da outra. Assim, é comum dizer que $\vec{F} = m\vec{a}$ é a 2^a Lei de Newton, mas não corresponde à formulação original de Newton.

Inicialmente, foi definido o *momentum* (quantidade de movimento $\vec{p}$) como uma medida de objeto que se origina conjuntamente da velocidade e da massa ($\vec{p} = m\vec{v}$), portanto, o princípio fundamental da dinâmica é: *A variação do momentum é proporcional à força aplicada e tem a direção dessa força.*

Isso significa que a força é a taxa de variação temporal do *momentum.*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}. \tag{1}$$

Dessa maneira, foi definido que a massa inercial m é a medida constante da resistência de um corpo a uma mudança no movimento em resposta a uma força externa. Embora esta formulação seja inteiramente equivalente àquela comumente escrita inicialmente, a última tem a vantagem de permanecer válida na mecânica relativística e a partir da expressão 1 é possível obter todas as equações da cinemática.

A 1^a Lei pode ser considerada um caso particular da 2^a Lei, se a força resultante que atua sobre a partícula é nula, ou seja, o que acarreta na permanência da partícula em repouso ou em MRU. A idéia implícita na 2^a Lei é de que a massa inercial m é uma característica do corpo, uma vez determinada quando conhecida a força que atua sobre ele, devemos usar o mesmo valor de m para descrever outras forças. A 2^a Lei de Newton é o Princípio Fundamental da Dinâmica, é a lei básica que permite determinar a evolução de um sistema na mecânica clássica.

A 3^a Lei de Newton é conhecida como lei da ação e reação. Isso quer dizer que as forças aparecem aos pares em cada corpo separadamente. Vou exemplificar as forças de reação mais usuais. A força que age sobre todo e qualquer corpo devido à atração gravitacional da Terra é chamada de força peso $\vec{P} = m\vec{g}$. Suponha agora um corpo em equilíbrio que está suspenso por um fio de massa desprezível, a reação em resposta à força peso é denominada força tensional $\vec{T} = -\vec{T}$. Se o fio é substituído por uma mola, a força equilibrante de reação a força peso é a força restauradora elástica, dada pela Lei de Hooke:

$$\vec{F} = -k\vec{y}. \tag{2}$$

Se o corpo é então colocado sobre uma mesa, onde também permanece em equilíbrio, a força que equilibra a força peso agora é aplicada pela mesa como reação de contato, denominada reação normal $\vec{N}$.

Realizaremos nossa abordagem da 5^a Sinfonia a partir da fundamentação da mecânica de Newton. Em um curso de graduação, os temas *Oscilações* e *Ondas* são apresentados, tradicionalmente, com a formulação das equações diferenciais de segunda ordem que regem o movimento oscilatório.

No caso de um oscilador harmônico simples, a equação diferencial que é obtida a partir da 2^a Lei de Newton e da Lei de Hooke, é homogênea, e a solução é dada por uma função do tempo.

No oscilador amortecido é introduzido uma força dissipativa que faz com que o gráfico do deslocamento tenha uma envoltória exponencial. O oscilador forçado fornece a condição necessária para obter uma amplitude máxima, quando a frequência de oscilação da força externa, ω está muito próxima da frequência natural do sistema ω_0.

No caso da *equação de onda*, é necessário calcular a aceleração num dado ponto x para associar uma equação de movimento com a propagação de onda. A velocidade e aceleração em x se obtém ao fixar x e derivar em relação ao tempo. A onda (x, t) depende do tempo devido somente à variável $u = (x - vt)$. Logo, a descrição matemática de uma onda será uma equação diferencial parcial, linear de segunda ordem. Apresento simulações computacionais simples para visualização de alguns fenômenos importantes, tais como, uma oscilação amortecida, ondas senoidais, fenômeno de interferência, batimentos, ondas estacionárias, modos normais em cordas e membranas.

É fortemente recomendável a leitura completa destas notas de aula, refazer as simulações e responder as questões apresentadas ao final de cada seção.

Em seguida, são apresentados alguns rudimentos de música. Aqueles necessários para podermos sintetizar uma música completa. A música escolhida, obviamente, é a 5^a Sinfonia de Beethoven. A 5^a Sinfonia possui 628 compassos, utiliza 12 instrumentos. Será escolhido um conjunto de compassos/instrumentos para cada aluno ou movimentos da sinfonia por equipes.

A avaliação, portanto, consiste apenas da apresentação em tempo hábil do trecho designado para cada um, que deve ser analisado e sintetizado. Instruções específicas, prazos e respectivos valores, podem ser definidos de acordo com a turma.

2 Oscilações

2.1 Oscilador Harmônico Simples

A figura 1 ilustra o comportamento oscilante de um sistema massa-mola, sem considerar qualquer atrito.

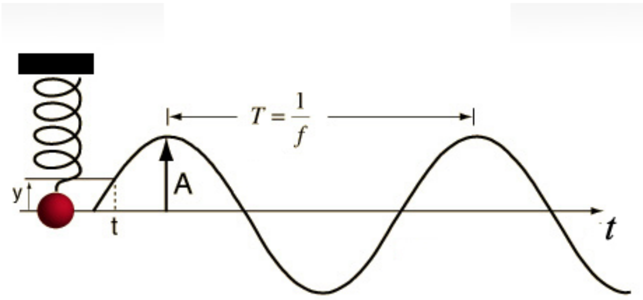

Figura 1: *Sistema massa-mola que realiza um MHS.*

Uma equação diferencial linear de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes, determinada a partir da segunda lei de Newton e da lei de Hooke, rege este tipo de sistema,

$$\ddot{y} + \omega_0 y = 0, \tag{3}$$

É fácil observar que a elongação da mola em função do tempo é:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0), \tag{4}$$

que corresponde a uma das soluções da equação diferencial (3). Como $\cos(\omega_0 t+\phi_0)$ é uma função periódica de período 2π, é definido que $T = (1/f) = 2\pi/\omega_0$ é o período da oscilação, em segundos; f_0 é a frequência de oscilação dada em hertz; $\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{k/m}$, dado em rad/s, é a frequência natural do sistema; φ é a fase do movimento, $\varphi = (\omega_0 t + \phi_0)$ e ϕ_0 é a fase inicial ou constante de fase, em $t = 0$.

A velocidade, aceleração e suas respectivas amplitudes de oscilação são:

$$\dot{y}(t) = -B\text{sin}(\omega_0 t + \phi_0), \quad com \quad B = A\omega_0;$$
$$\ddot{y}(t) = -C\cos(\omega_0 t + \phi_0); \quad com \quad C = A{\omega_0}^2.$$

De modo que, de acordo com a condição inicial $t = 0$, temos:

$$y_0 = A\cos(\phi_0);$$
$$v_0 = -B_0\text{sin}(\phi_0);$$
$$a_0 = -\omega_0^2 y_0.$$

Uma abordagem muito usual na representação gráfica de um sinal periódico baseia-se na relação estabelecida entre um movimento oscilatório senoidal e a definição matemática de uma circunferência. O percurso de uma trajetória circular no sentido anti-horário assume, em cada ciclo, valores entre (0 e 2π rad). A quantificação em cada momento do arco percorrido resulta a grandeza designada pela fase. Assim, pode-se pensar em uma representação gráfica de uma forma de onda que apresenta sua amplitude em função da fase, e corresponde a variação entre (0 e 2π) rad à duração de um período do sinal.

Com a utilização da representação de um sinal senoidal em termos de exponenciais complexas, dada pela relação de Euler:

$$e^{j\theta} = cos(\theta)+, sin(\theta), \tag{5}$$

é possível exemplificar o gráfico da fase da função $y(t) = e^{j\omega_0 t}$, com frequência natural $\omega_0 = 2000rad/s$ e variação de tempo de 0 a $4s$ em intervalos de 0,02ms.

```
% Exemplo 1.1 - Significado da fase em um MHS .
t = (0:0.02e-03:2e-03);
x = exp (j*2000*pi*t); y = real (x); z = imag (x);
subplot (1,2,1);
plot (x,':');
title ('exp (i\omegat)');
xlabel ('Real');
ylabel ('Imaginario');
grid on;
axis square;
subplot (1,2,2);
plot (t,y,'-',t,z,'r:');
ylabel ('Raio');
xlabel ('tempo (s)');
title ('Re e Im[exp (i\omega t)]');
axis square;
```

Exercícios

2.1 - Trace co-senos com diferenças de fase de $\pi/2$, $3\pi/2$ e 2π.

2.2 - (a) A partir do instante inicial, quais são os valores da fase para que o deslocamento da mola seja máximo? (b) O que são sistemas isócronos? (c) Trace os gráficos de x(t), v(t) e a(t);

2.3 - (a) Tratando-se de uma força conservativa, determine o trabalho W realizado pela mola (sobre o bloco), (b) a energia cinética K e a energia potencial U. (c) Mostre que amplitude A é proporcional a energia mecânica e represente graficamente $F(x)$, K e U.

2.2 Oscilador Harmônico Amortecido

Se há um amortecimento devido a uma força dissipativa da forma $f_{at} = bv$, por exemplo, a tendência, se não houver uma força externa $F(t)$, é que em algum instante cessem as oscilações. Trata-se do caso do oscilador harmônico amortecido. Agora, a equação diferencial fica

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \tag{6}$$

com coeficiente de amortecimento dado por $\gamma = (b/m) > 0$. Como a equação diferencial é linear a solução não é única. As soluções obedecem ao princípio da superposição. A condição necessária e suficiente para que as soluções sejam linearmente independentes é que o *Wronskiano* não se anule, ou seja,

$$W = det \begin{bmatrix} y_1(t), & y_1(t) \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Considere uma solução do tipo

$$y(t) = e^{pt}. \tag{7}$$

Ao substituir a velocidade e a aceleração na equação diferencial, chega-se a equação algébrica auxiliar

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0, \tag{8}$$

cujas raízes

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}, \tag{9}$$

indicam o tipo de amortecimento: Amortecimento subcrítico: $\gamma < 2\omega_0$; Amortecimento crítico: $\gamma = 2\omega_0$; e Amortecimento supercrítico: $\gamma > 2\omega_0$. O primeiro caso, amortecimento subcrítico, é de interesse particular, já que os sons executados por qualquer instrumento musical são harmonicamente amortecidos com $\gamma < 2\omega_0$.

Nesta situação, surgirá uma raiz de um número negativo. Então, ao chamar

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right), \tag{10}$$

implica que

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega_0. \tag{11}$$

A solução pode ser uma combinação linear correspondente às soluções das duas raízes da equação característica e para satisfazer as condições iniciais ela necessita de duas constantes arbitrárias a e b,

$y(t) = ae^{(p_+)t} + be^{(p_-)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(ae^{j\omega t} + be^{j\omega t})$, ou

$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a\cos(\omega t) + jb\sin(\omega t)]$.

Ao tomar somente a parte real como solução, chega-se a

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A\cos(\omega t + \phi_0)]. \tag{12}$$

A seguinte rotina em Matlab exemplifica essa solução com um gráfico da enlogação da mola em função do tempo.

```
% O.H.A. (caso subcritico)
A = 3; t = 0:(pi/50):(4*pi); % Tempo
gama = 0.5; % Fator de amortecimento
f = A*exp(-gama*t); g = cos(2*pi*t);
y = f.*g;
figure;
plot(t,y) hold on
plot(t,f,'r')
plot(t,-f,'r') hold off
title('OH com Amortecimento Subcritico')
xlabel('t'); ylabel('y(t)');
```

Exercícios

2.4 - Visualize o comportamento do sistema para diversos valores do fator de amortecimento γ.

2.5 - Trace, o gráfico da elongação em função do tempo para o caso crítico e supercrítico. Faça o mesmo para a velocidade e aceleração do sistema.

2.6 - Visto os três casos possíveis de amortecimento, que tipo de amortecimento devemos escolher para que o móvel retorne mais rapidamente e permaneça na posição de equilíbrio? Ou seja, como se deve ajustar γ e ω_0 para o retorno mais rápido ($\gamma < 2\omega_0$, $\gamma = 2\omega_0$ ou $\gamma > 2\omega_0$)?

2.3 Oscilador Harmônico Forçado

Suponha agora, não mais uma força dissipativa e sim uma força externa, fazendo com que o movimento não pare (ou que cesse mais rapidamente). Esse é o oscilador harmônico forçado. A força externa pode ter vários tipos de dependência funcional com o tempo, uma situação muito estudada é quando a força externa também oscila.

$$F(t) = F_0 cos(\omega t), \tag{13}$$

A equação diferencial que rege esse sistema é

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_{ext}(t)}{m}. \tag{14}$$

Uma solução particular é

$$y = Acos(\omega t). \tag{15}$$

Sendo $\dot{y} = -A\omega sin(\omega t)$ e $\ddot{y} = -\omega^2 y$, temos que

$$-\omega^2 y + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{Am} y,$$

portanto

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{16}$$

em que ω_0 é a frequência natural do sistema, ω é frequência da força externa aplicada. Então, a massa oscila com mesma frequência da força, mas com amplitude que depende dessa frequência e também da frequência natural do sistema.

Portanto, se: $\omega \ll \omega_0$, implica em uma força aplicada na mesma direção do deslocamento; $\omega > \omega_0$, significa sacudir o sistema para frente e para trás em alta velocidade ($A < 0$); Quando $\omega = \omega_0$, temos o fenômeno da resonância ($A \to 0$).

Um oscilador harmônico real é caracterizado por duas grandezas: a sua frequência natural ω_0 e a taxa de amortecimento γ. No caso do sistema massa-mola $\omega_0 = k/m$ e $\gamma = b/m$, em que b é o coeficiente da força de atrito, proporcional à velocidade instantânea da massa.

Para outros osciladores que não o simples sistema massa-mola, é bem mais fácil se determinar o valor de ω_0 do que o de γ. Neste caso, a análise de curvas de ressonância pode ser usada para determinar o seu valor.

2.4 Oscilador Forçado e Amortecido

A equação diferencial que rege o oscilador forçado e amortecido é

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_{ext}(t)}{m}. \tag{17}$$

A curva de resposta do oscilador forçado amortecido é descrita matematicamente por

$$A(\omega) = \frac{F_0}{2m\omega_0}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Se γ é pequeno, a equação 18 pode ser aproximada, perto de $\omega = \omega_0$, por

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2/4]^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

A expressão 19 mostra que o máximo da curva de ressonância ocorre em $\omega = \omega_0$, é dado por

$$A_{max} = A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}. \tag{20}$$

A expressão 19 mostra ainda que

$$A\omega_0 \pm \gamma/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{F_0}{m\omega_0\gamma} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{21}$$

Ou seja, a distância entre os pontos em que a reta corta a curva de ressonância determina o valor de γ.

Esta distância é também chamada de semilargura de pico. O fator de qualidade Q, que mede a quantidade de atrito no sistema, é definido por

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}. \tag{22}$$

Exercícios

2.7 - Faça o gráfico da amplitude das respostas vibratórias em função da frequência de excitação, para três valores diferentes de amortecimento do sistema.

2.8 - Mostre que a fase é dada por

$$\phi = tg^{-1}\left[\frac{2\gamma(\frac{\omega}{\omega_0})}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}\right].$$

Faça o gráfico das relações de fase entre a força harmônica de excitação e a resposta vibratória do oscilador.

2.9 - A análise da posição e do momento linear de um oscilador é dada pelo Espaço de Fase. Mostre que a trajetória do movimento no espaço de fase é representada por uma família de elipses no plano $y(t)$ e $p(t)$, em que cada elipse depende de uma energia mecânica.

3 Ondas

Uma onda pode ser qualquer sinal transmitido de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida. O que caracteriza um movimento ondulatório é a propagação. Quando a oscilação da onda é paralela à direção de propagação, temos uma onda longitudinal. Se a oscilação for perpendicular à direção de propagação, teremos uma onda transversal. Ondas transversais numa corda são chamadas de ondas progressivas (ou ondas viajantes). Uma onda progressiva pode ter propagação para a direita: $\psi(x,t) = f(x - vt)$ ou para a esquerda: $\psi(x,t) = g(x + vt)$. Geralmente só há um sentido de propagação que é sempre refletida (em sentido oposto) ao atingir uma extremidade. Para uma corda muito longa a onda progressiva pode ser representada por

$$\Psi = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{23}$$

Onda harmônica é aquela cuja uma perturbação num ponto x corresponde a uma oscilação harmônica. Ou seja, o perfil da onda é senoidal dependente do tempo através da variável

$$u = x - vt, \tag{24}$$

então,

$$\Psi(x,t) = Acos[k(x - vt) + \phi_0. \tag{25}$$

Ao derivar a fase total ϕ, determina-se a velocidade de fase

$$\dot{\phi} = k\dot{x} - \omega = 0, \tag{26}$$

logo,

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f. \tag{27}$$

O tempo para completar uma oscilação ($f = 2\pi\ rad$) corresponde a um período. Então, de

$$\phi = \phi_0 + \omega t, \tag{28}$$

$$2\pi = 0 + \omega\tau \Rightarrow \omega = 2\pi f = kv,$$

portanto,

$$\Psi(x,t) = Acos(kx - +\phi_0). \tag{29}$$

Os parâmetros da onda progressiva, além dos parâmetros básicos do movimento periódico tais como amplitude; período e frequência, envolvem a velocidade de propagação v, o comprimento de onda $\lambda = v\tau = 2\pi/k$, o número de onda k (dado em $[rad/m]$ ou $[m^{-1}]$), a frequência angular ω e a relação de onda $v = \lambda f$.

Da mesma forma que a frequência $f = 1/\tau$ dá o número de oscilações por unidade de tempo, o número de onda $\sigma = 1/l$ dá o número de comprimentos de onda por unidade de comprimento. O análogo espacial da frequência angular é $\omega = 2\pi f$ é $k = 2\pi\sigma$ (que seria o número de onda angular). A velocidade de onda é determinada pelas propriedades do meio e é independente de outros parâmetros, mas pode ser determinada através das medidas da frequência e do comprimento de onda.

Todos os conceitos básicos de um movimento periódico podem ser visualizados ao traçar a onda

$$\psi_1 = Asin(kx - \omega + \phi).$$

Arquivo `psi_1.m`:

```
function y = psi_1(x,t,k,omega,phi)
y=sin(k*x-omega*t+phi)
```

Use como exemplo, $t = 0$, $\phi = 0$, $k = 10/m$ e $\omega = 3rad/s$, ou seja

```
Command Window
>> x = [0:0.01:1];
>> plot(x,psi_1(x,0,10,3,0));
```

Exercícios

3.1 - Qual é o comprimento de onda λ de ψ_1?

3.2 - Qual é o valor obtido de acordo com o valor especificado pelo número de onda?

3.3 - Mude a fase por π (fixe agora $\phi = \pi$) e trace a onda novamente. Como a mudança de fase π afeta a onda?

3.1 Interferências de ondas

Considere duas ondas que propagam para a direita:

$$\begin{cases} \psi_1(x,t) = A_1 cos(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1), \\ \psi_2(x,t) = A_2 cos(k_1 x - \omega_2 t + \phi_2). \end{cases}$$

A onda resultante será

$$\Psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2 = Acos(kx - \omega t + \phi) \tag{30}$$

em que ϕ é a diferença de fase entre as duas ondas, a amplitude da onda resultante é dada pela lei dos co-senos e a intensidade (potência média) da onda é proporcional à A^2. Sendo assim, a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que propagam na mesma direção e sentido é uma onda resultante de mesmo tipo, mas a intensidade da resultante é dada por

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2 cos(\phi)}, \tag{31}$$

e geralmente é diferente da soma das intensidade dependendo da diferença de fase. Este fenômeno chama-se interferência. Para $\phi = 2n\pi$, temos interferência construtiva, e para $\phi = (2n + 1)\pi$, temos interferência destrutiva, com $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3...$ Em particular, se $I_1 = I_2$, $I_{max} = 4I_1$ e $I_{min} = 0$.

Para explorar o fenômeno de interferência (construtiva e destrutiva), defina agora a onda ψ_2, similarmente à ψ_2. Quando as ondas somam-se em fase ocorre interferência construtiva. A amplitude é a soma das amplitudes das ondas ψ_1 e ψ_2. Quando as ondas somam-se fora de fase, ocore interferência destrutiva e a amplitude é a diferença de amplitude das ondas ψ_1 e ψ_2.

Exercícios

3.4 - A superposição das duas ondas resultará na onda $\Psi = \psi_1 + \psi_2$. Trace a onda total Ψ para as diferenças de fase 0; $\pi/4$; $\pi/2$ e 2π.

3.5 - Considere a dependência do tempo (apenas o tempo inicial $t = 0$). Para visualizar o efeito de ambas variáveis x e t, simultaneamente, é necessário uma animação do movimento da onda. Use a função `viajonda` para fazer isto:

```
function viajonda(xmin,xmax,k,omega,phi)
tmax = 2*pi/omega; % Tempo total da animacao
tincremento = 0.05;
nframes = 1 + round(tmax/tincremento);
x = [xmin:0.01:xmax];
for i = 0:nframes-1;
plot(x,psi_1(x,i*tincremento,k,omega,phi));
axis([xmin xmax -1.2 1.2])
M(i+1) = getframe;
end
movie(M,20)
```

Para avaliar, use, por exemplo

```
Command Window:
```

```
>> viajonda(0,1,10,3,0);
```

Note que a animação é feita sob um intervalo de tempo de zero a $2\pi/\omega$.

3.6 – Qual é uma escolha razoável para o comprimento de onda para um intervalo de tempo? (A onda completa uma oscilação num dado ponto no espaço sobre o intervalo de tempo $1/f = \omega 2\pi$ (período). Durante um período as ondas viajam um comprimento de onda. A velocidade é a distância viajada pelo intervalo de tempo).
3.7 – Derive dessa expressão, a velocidade, v de uma onda em termos de λ e f.
3.8 – O que determina a direção em que a onda propaga? Responda essa questão com a definição de uma outra onda, ψ_3, com sinal de (kx) negativo. Em qual direção ψ_3 propaga?

Batimentos

Considere duas ondas de mesma amplitude no mesmo sentido (como as definições de ψ_1 e ψ_2, mas com frequências diferentes (e consequentemente o número de onda k também diferentes). Ao supor $\omega_1 > \omega_2$, $k_1 > k_2$ e introduzir a frequência angular média

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

e a diferença de frequências

$$\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2) = 2\pi\Delta f,$$

teremos

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega,$$

e

$$\omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega.$$

Assim, $\Psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2$, fica ,

$$\Psi(x,t) = 2Acos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)cos(\bar{\omega t}). \tag{32}$$

Este resultado vale para qualquer que sejam ω_1 e ω_2, mas o caso de interesse, em que ω_1 e ω_2 são muito próximos, corresponde a supor que $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$. Logo,

$$\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2) \ll \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \bar{\omega},$$

e

$$\Delta k = (k_1 - K_2) \ll \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \bar{k},$$

então,

$$\Psi(x,t) = Acos(k_1 x - \omega_1 t) + Acos(k_1 x + \omega_1 t),$$

$$\Psi(x,t) = Acos\left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\bar{k} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right],$$

portanto,

$$\Psi(x,t) = B(x,t)cos(\bar{k} - \bar{\omega}). \tag{33}$$

Ou seja, $\Psi(x,t)$ é uma onda com frequência média $\bar{\omega}$ elevada e de amplitude B modulada por outra onda de frequência $\Delta\omega$ mais baixa. Ao considerar a fase de $\Psi(x,t)$ como sendo $\phi(x,t) = (\bar{k}x - \bar{\omega}t)$, a velocidade de fase é definida como $\nu_\phi f = \bar{\omega}/\bar{k}$. Analogamente, a fase de $B(x,t)$ é definida como

$$g = \left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right),$$

e a velocidade de grupo, para Δk suficientemente pequeno, é definida como

$$\nu_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}\,|_{k=\bar{k}}.$$

Para ondas numa corda vibrante homogênea $v = (\omega/k) = \sqrt{T/\rho} = cte$, de modo que $\nu_\phi = \nu_g = v$. Ou seja, as velocidades de fase e de grupo coincidem e o grupo propaga-se com a velocidade da onda (ver `batimentos.m`).

Considere as duas ondas e a resultante delas, citado ainda pouco, como ondas sonoras captadas por um microfone conectado a uma interface de áudio. É possível ouvir o fenômeno de batimento da onda resultante usando o comando `sound(Psi)`. Assim, torna-se possível ouvir claramente a variação de amplitude no som produzido. Se variarmos uma das frequências para aproximá-la da outra, podemos verificar que a diversidade de amplitude é cada vez mais lenta.

Trata-se justamente do procedimento adotado pelos músicos para afinar seus instrumentos: tocando a nota levemente desafinada junto com um padrão, haverá produção de batimentos. Ao ajustar a afinação do instrumento, os batimentos tornam-se cada vez mais lentos, até cessarem por completo, quando a nota estiver perfeitamente afinada segundo o padrão de acuidade humana.

```
function batimentos
x = 0:0.005:2;
w0 = 4*2*pi; vf = 0.5;
beta0 = w0/vf; dw = 0.3*2*pi;
w1 = w0-dw; w2 = w0+dw;
beta1 = w1/vf; beta2 = w2/vf;
dbeta = (beta2-beta1)/2;
for t = 0:0.1:2; % tempo da a n i m a   o
Psi1 = cos(w1*t-beta1*x); Psi2 = cos(w2*t-beta2*x);
Psi = Psi1 + Psi2;
plot(x,Psi)
legend('psi(x,t)');
xlabel('x (m)'); ylabel('Amplitude de psi');
hold on
% Pacote de Onda:
pacote = 2*cos(dw*t-dbeta*x);
plot(x,pacote,'k', x, -pacote,'k');
axis([0 2 -2 2]); hold off
pause(0.3)
end
```

Desta forma, torna-se possível analisar matematicamente para que valor numérico converge o erro relativo entre as frequências de batimento quando o ouvido humano já não mais percebe variações de amplitude. A tonalidade, um atributo fisiológico associado à frequência, permite distinguir sons como graves (frequências baixas) ou agudos (frequências altas).

No âmbito musical desenvolveu-se uma sintaxe de classificação sonora baseada em notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si). Assim, sabemos que a frequência que caracteriza um som, corresponde a uma determinada nota musical, por exemplo, Lá $= 440Hz$.

No entanto conseguimos distinguir claramente a diferente sonoridade de uma nota Lá de diversos instrumentos, como por exemplo, de um violino e um piano. O que possibilita essa distinção é a forma da onda, outra característica física associada a um atributo fisiológico, o timbre. O movimento oscilatório de uma corda de guitarra, por exemplo, percebe-se o que é a tonalidade de uma nota musical, pois além da oscilação principal, existem vibrações oscilatórias secundárias nas subsecções da corda, que vão necessariamente provocar compressões e rarefações atmosféricas resultando em elementos sonoros que vão se sobrepor ao movimento oscilatório.

A frequência relativa à oscilação principal, é designada como frequência fundamental e sendo a oscilação com maior expressão sobrepõe-se a todas as outras. O valor da frequência fundamental corresponde à *tonalidade* do som (nota musical). O conjunto dos valores de frequência relativos a oscilações secundárias na fonte sonora, designa-se por *Conteúdo Harmônico*, que corresponde ao timbre do som (a característica que permite distinguir a fonte sonora). Entretanto, para outros tipos de onda, a velocidade de fase ν_ϕ varia com o comprimento de onda λ, o que é equivalente com o N^o de onda k, $\omega = k\nu_\phi$ e $\nu_g = (d\omega/dk) = \nu_\phi + (kd\nu_\phi/dk)$.

Nesse caso a velocidade de grupo é diferente da velocidade de fase, então há a dispersão, que é o que ocorre com as ondas de luz em um meio. A velocidade ν_ϕ é diferente para o vermelho e para o violeta correspondendo à índices de refração diferentes. Quando há dispersão, as ondas individuais dentro da envoltória deslocam-se em relação a mesma, podendo *desaparecer* para depois *ressurgir*.

É possível mostrar também que a velocidade de grupo é a velocidade de propagação de energia, tendo assim um significado físico mais importante que a velocidade de fase.

Exercícios

3.9 – Faça uma rotina análoga ao exemplo anterior (batimentos), mas para ondas dispersivas.

3.2 Onda estacionária

Quando uma onda viaja para a esquerda é somada com uma onda de mesma amplitude, mesmo comprimento de onda e mesma frequência, mas viaja para a direita, a onda resultante será estacionária. Ou seja, a onda não progride para a direita nem para a esquerda. Considere, portanto, duas ondas propagando em sentidos opostos:

$$\begin{cases} \psi_1(x,t) = A_1 cos(k_1 x - \omega_1 t - \phi_1), \\ \psi_2(x,t) = A_2 cos(k_1 x - \omega_2 t + \phi_2). \end{cases}$$

A onda resultante é

$$\Psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2 = 2A cos(kx) cos(\omega t). \tag{34}$$

Como a resultante é uma função $f(x) * f(t)$, a forma de onda não muda, somente a amplitude se altera, não há propagação. Temos então, uma onda estacionária. Para visualizar uma onda estacionária, primeiro defina a soma de ψ_1 e ψ_2. Depois, escreva a função `estacionaria`:

```
function estacionaria(xmin,xmax,k,omega,phi)
tmax = 2*pi/omega; tincrement = 0.05;
nframes = 1 + round(tmax/tincrement);
x = [xmin:0.01:xmax];
for i = 0:nframes-1
plot(x,PSI(x,i*tincrement,k,omega,phi));
axis([xmin xmax -2.2 2.2])
M(i+1) = getframe;
end
movie(M,20)
```

Sendo,

```
function y = PSI(x,t,k,omega,phi)
y = psi1(x,t,k,omega,phi)+ psi2(x,t,k,omega,phi);
```

faça a *animação* de uma onda estacionária com

```
Command Window
>> estacionaria(0,1,10,3,0)
```

Note que não há deslocamento em alguns pontos. Esses pontos são chamados de nodos da estacionária. Quando uma corda está pressa em suas extremidades, o deslocamento da onda deve ser necessariamente zero nas extremidades. As soluções permitidas para a equação de onda são restritas para ondas estacionárias que tem nodos localizados em duas extremidades da corda. Se uma corda é distendida de $x = 0$ a $x = l$, então o fato que a corda está fixa em suas extremidades significa que: $\psi_1(0,t) = \psi_2(l,t) = 0$. Essas duas condições são as condições de contorno. Elas restringem as soluções aceitáveis da equação de onda.

3.3 A equação de Onda

Para associar uma equação de movimento com a propagação de onda, deve-se calcular a aceleração num dado ponto x. A velocidade e aceleração em x se obtém ao fixar x e derivar em relação ao tempo. A onda $\Psi(x,t)$ depende do tempo devido somente à variável $u = x - vt$, assim

$$v_\Psi = \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \quad \Rightarrow \quad a_\Psi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t), \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Psi(u) &= \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -v\frac{df}{du}, \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(u) &= -v\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{df}{du}\right) = -v^2\frac{d^2 f}{du^2}, \end{aligned}$$

como $(\partial u/\partial x) = 1$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi(u) = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{df}{du},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(u) = \left(\frac{d^2 f}{du^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2 f}{du^2},$$

logo, a descrição matemática de uma onda será uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem. Em uma dimensão, a equação de onda é escrita como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{36}$$

em que v é a velocidade de fase da onda e Ψ representa a variável que depende da posição de x e do tempo. Essa é a forma da equação de onda que se aplica a uma corda esticada. Em três dimenções a equação de onda toma a forma

$$\nabla \Psi = \frac{1}{v}\ddot{\Psi}, \tag{37}$$

que pode descrever o comportamento de uma membrana esticada da pele de um tambor ou o diafragma de um microfone.

Soluções da equação de onda

Se $f(x-vt)$ e $g(x+vt)$ são diferenciáveis, ao tomar $u = x - vt$ e $\Psi = f(u)$, por exemplo, é possível mostrar que $f(u)$ é solução da equação de onda. Além disso, sejam f e g duas soluções quaisquer, uma solução geral pode ser atribuída da forma $\Psi(x,t) = af(x,t) + bg(x,t)$, em que a e b são constantes arbitrárias. Como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(af+bg) = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(af+bg) = a\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 g}{\partial t^2},$$

o que implica que $\Psi(x,t)$ e qualquer combinação linear de $f(x,t)$ e $g(x,t)$ também é solução da equação de onda.

O caso da corda vibrante entre dois pontos fixos é o de um estado estacionário, tais como a corda de um violão ou uma membrana vibrante, podem ser considerados como resultante da interação simultânea de duas ondas repetitivas, uma com velocidade v e outra com velocidade $-v$. A função de onda total $\Psi(r,t)$ para o estado estacionário é então a superposição das funções de onda $\psi_{\_} = f(x-vt)$ e $\psi_+ = g(x+vt)$.

Uma onda viajante que é limitada em um plano de onda no espaço e oscila no espaço e no tempo pode ser expressa como a combinação de $y = Asin(kx-\omega t)$ e $y = Acos(kx-\omega t)$, ou convenientemente na forma complexa $\psi = Ae^{j(kx-\omega t)}$

No caso de ondas clássicas, tanto a parte real ou a imaginária são escolhidas desde que a onda seja real, mas para aplicações em funções de onda em mecânica quântica como o caso da partícula livre, a forma complexa deve ser retida.

Uma solução para a equação de onda de uma corda ideal pode tomar a forma de uma onda progressiva (ou viajante):

$$\psi = Asin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x \pm vt). \tag{38}$$

Para uma corda de comprimento L fixa em ambas as extremidades, a solução toma forma de ondas estacionárias:

$$\psi = Asin(\omega_n t)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{39}$$

Para as condições iniciais na corda, a solução de onda estacionária pode ser expressa por um grau arbitrário de precisão pela Série de Fourier:

$$\psi = \sum_{n=1} B_n cos(\omega_n t)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{40}$$

Uma solução útil para a equação de onda de uma corda ideal é

$$\psi = Asin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x \pm vt). \tag{41}$$

Pela substituição direta das derivadas parciais, verifica-se que $\psi(x,t)$ é solução da equação de onda da corda vibrante, desde que a velocidade da onda para uma corda distendida seja $v = \sqrt{T/\rho}$, onde T é a tensão na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento.

3.4 Modos de vibração

Ao tomar como solução da equação de onda uma função do tipo

$$\Psi(x,t) = X(x)\text{sin}(\omega t), \tag{42}$$

em que X fornece a dependência da amplitude com x, e ω é a frequência angular das oscilações. Então,

$$\dot{\Psi} = -\omega X(x)\cos(\omega t),$$

$$\ddot{\Psi} = -\omega\Psi.$$

Ao substituir as derivadas na equação de onda (Eq. (17)), fica

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[X\text{sin}(\omega t)] = -\omega^2 X\text{sin}(\omega t),$$

$$X'' + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X = 0, \tag{43}$$

que é a equação do oscilador harmônico (1). Observe que existe um comportamento senoidal no tempo e no espaço. Como $\omega = 2\pi f$ e $v = \lambda f$, a equação de onda, quando a variável t é eliminada, toma a forma padrão

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) X = 0, \tag{44}$$

cuja solução é do tipo

$$X = X_0\text{sin}\left(\frac{\omega}{v}x\right) = X_0\text{sin}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{45}$$

Para o caso da corda vibrante, as duas últimas equações correspondem à solução para ondas estacionárias. Os possíveis comprimentos de onda de uma corda de comprimento L, fixa em cada extremidade, é

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \text{ com } n = 1,2,3,4... \tag{46}$$

Porque a distância entre os nós é meio comprimento de onda, e os nós de uma onda estacionária dividem o comprimento total L num número inteiro de partes, isto é, os extremos fixos não podem se deslocar. Chega-se a essa conclusão mais rigorosamente com a utilização das condições de contorno.

A solução geral da equação 43 é

$$X = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + B\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{47}$$

O deslocamento $X = 0$ ocorre para $x = 0$ e $x = L$. A condição $x = L$ necessita que $A = 0$ (ausência de movimento) ou

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = 0,$$

que só ocorre se

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = n\pi, \text{ com } n = 1, 2, 3...$$

então o comprimento de onda λ_n, associado ao modo n é

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \tag{48}$$

sendo:

$n = 1 \rightarrow 1^o$ harmônico (fundamental);

$n = 2 \rightarrow 2^o$ harmônico,

$n = 3 \rightarrow 3^o$ harmônico...

O modo de ordem n contém precisamente n semi-comprimentos de onda e tem $(n-1)$ nodos, além dos extremos fixos. A frequência f_n do modo n é

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{\nu}{2L}, \tag{49}$$

em que $\nu = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, portanto

$$f_1 = \frac{\nu}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = n\nu_1. \tag{50}$$

A equação 50 é conhecida como equação de Mersenne, em que n representa o *n-ésimo* harmônico. É importante ressaltar que o movimento geral de uma corda pode ser dado por uma série de Fourier. No decorrer das aulas foram desenvolvidas rotinas para visualizar modos vibracionais unidimensionais e tridimensionais.

O fato de que ondas confinadas numa região limitada no espaço só podem oscilar em frequências bem definidas, que formam um conjunto discreto é uma característica geral extremamente importante do movimento ondulatório. Conclui-se que as soluções da equação de onda podem ser quantizadas, ou seja, são soluções definidas somente para um conjunto discreto de valores de n.

É importante ressaltar que o movimento geral de uma corda pode ser dado por uma série de Fourier. A teoria de Fourier provavelmente é a teoria mais utilizada em ciência e tecnologia, merece, dessa forma, um estudo detalhado que será visto futuramente. Considere como exemplo a seguinte função

```
function y = u(x, t, n, omega, phase)
y = cos(n*omega*t + phase)*sin(n*pi*x);
```

Sendo n é um inteiro relacionado ao número de nodos entre as extremidades. Existem $(n-1)$ nodos entre as extremidades. Para animar, por exemplo, $n = 2$ modos, use:

```
function modos(xmin,xmax,n,omega,phase)
tmax = 2*pi/omega; tincremento = 0.05;
nframes = 1 + round(tmax/tincremento); x = [xmin:0.01:xmax];
for i = 0:nframes-1
plot(x,u(x,i*tincremento,n,omega,phase));
axis([xmin xmax -1.2 1.2])
M(i+1) = getframe;
end; movie(M,20)
```

```
Command Window
>> modos(0,1,2,3,0)
```

Exercícios

3.9 – Faça animações com os modos vibracionais $n = 2$, 3, e 4. Se você usar o mesmo número de quadros e animar o mesmo intervalo, então você deve notar que as oscilações tornam-se mais rápidas ao aumentar n. Para uma animação mais suave, é necessário mais quadros quando as oscilações são rápidas. Para adquirir uma animação mais suave escolha um intervalo de tempo que cobre um número inteiro de períodos (assim não há descontinuidade como das repetições da animação).

3.10 - Defina uma nova onda que seja a soma do modo vibracional $n = 2$ e fase $\phi = 0$ com o modo vibracional $n = 2$ e $\phi = 2\pi$. *Anime* o resultado. A diferença de fase das duas ondas é de 2π. Como se chama esse tipo de fenômeno? Defina uma nova onda que seja a soma do modo vibracional $n = 2$ e fase $\phi = 0$ com o modo vibracional $n = 2$ e fase $\phi = 2\pi$. *Anime* o resaultado. A diferença de fase das duas ondas é de 2π. Como se chama esse tipo de fenômeno?

3.11 - Defina uma nova onda que seja a soma dos modos vibracionais $n = 3$ e $n = 2$ (tome $\phi = 0$ em ambos os casos). Essa nova onda ainda é uma solução válida para a equação da corda vibrante porque satisfaz as condições de contorno da equação diferencial (as extremidades permanecem fixas, $u(0, t) = u(l, t) = 0$). Mas a soma das duas ondas estacionárias neste caso não é uma onda estacionária. Qual é o período dessa nova onda?

3.12 - Determine a equação da corda vibrante assim como sua solução.

A análise da corda vibrante pode ser generalizada diretamente pra uma membrana retangular. O resultado é um conjunto de modos vibracionais que agora estão indexados com dois inteiros, n e m (um para cada grau de liberdade espacial). Considere uma membrana rectangular esticada e presa em $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$ e $y = L_y$. A membrana vibra perpendicularmente ao plano xy, na direção z. Então, devemos assumir

$$z(x, y, z) = \Psi(x, y)e^{j\omega t}, \tag{51}$$

uma equação de onda em 2D

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + k^2\Psi = 0. \tag{52}$$

Pelo método de separação de variáveis, a solução é

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y). \tag{53}$$

Ao substituir na equação de onda 2D e dividir por $X(x)Y(y)$, temos

$$\frac{1}{X}X'' + \frac{1}{Y}Y'' + k^2 = 0, \tag{54}$$

temos portanto

$$\begin{cases} X'' + k_x^2 X = 0, \\ Y'' + k_y^2 Y = 0, \end{cases}$$

em que as constantes k_x e k_y estão relacionadas por $k_x^2 + k_y^2 = k^2$. As soluções são senoidais, portanto

$$z(x, y, z) = Asin(k_x x + \phi_x)sin(k_y y + \phi_y)e^{j\omega t}, \tag{55}$$

em que k_x, k_y, ϕ_x e ϕ_y são determinadas pelas condições de contorno $z(0, y, t) = z(L_x, y, t) = z(x, L_y, t) = 0$.

Ou seja, a condição

$$\begin{cases} z(0,y,t)=0, \ requer \ \phi_x = 0, \\ z(x,0,t)=0, \ requer \ \phi_y = 0, \end{cases} \tag{56}$$

e a condição

$$\begin{cases} z(L_x,y,t)=0, \ requer \ k_x L_x = m\pi, \ m = 1,2,3... \\ z(x,L_y,t)=0, \ requer \ k_y L_y = n\pi, \ n = 1,2,3... \end{cases} \tag{57}$$

Então, as ondas estacionárias na membrana são dadas por

$$z(x,y,t) = Asin(k_x x)sin(k_y y)e^{j\omega t}, \tag{58}$$

em que $|A|$ é o deslocamento máximo da amplitude. Os números de onda k_x e k_y formam um conjunto discreto de valores limitados, que por sua vez restringe as frequências naturais para os modos permitidos

$$f_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Como exemplo, primeiro defina uma função de onnda 2D:

```
function z = psi2d(x, y, t, n, m, omega, phase)
z = cos(n*omega*t + phase).*sin(n*pi*x).*sin(m*pi*y);
```

Em seguida, refaça a animação, que é análoga ao caso unidimensional, exceto que o gráfico agora necessita ser 3D, então o comando agora é `mesh` ao invés de `plot`.

```
function
a = modos3d(xmin,xmax,ymin,ymax,n,m,omega,phase)
tmax = 2*pi/omega;
tincremento = 0.05;
nframes = 1 + round(tmax/tincremento);
x = [xmin:0.1:xmax];
y = [ymin:0.1:ymax];
[x,y] = meshgrid(x,y);
for i = 0 : nframes-1
mesh(x,y,psi2d(x,y,i*tincremento,n,m,omega,phase));
axis([xmin xmax ymin ymax -1.2 1.2])
M(i+1) = getframe;
end
movie(M,20)
```

A animação dos modos $n = 1$ e $n = 2$ é realizada fazendo

```
Command Window
>> modos3d(0,1,0,1,1,2,3,0)
```

Exercícios

3.13 – Qual é o eixo x e qual é o eixo y (esquerdo ou direito)?

3.14 – (a) *Anime* com os modos $m = 2$ e $n = 2$. (b) *Anime* com os modos $m = 2$ e $n = 3$.

Esse foi o caso de uma membrana retangular, mas o caso de interesse particular é o de uma membrana circular para estudo de sonoridade de tambores. Para a introdução desse tipo de estudo (e diversos outros) cabe uma breve revisão de alguns conceitos de Física Matemática. Em particular equações que trabalham com o operador Laplaciano. O primeiro passo para lidar com esses tipos de equações é usar o método de separação de variáveis. Então, ao assumir que

$$u(\vec{r},t) = U(\vec{r})T(t), \tag{60}$$

a maioria das EDP de interesse são reduzidas para a forma

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0. \tag{61}$$

Se $k^2 = 0 \rightarrow$ Equação de Laplace;
Se $k^2 > 0 \rightarrow$ Equação de Helmholtz;
Se $k^2 < 0 \rightarrow$ Equação de Difusão.

A equação de Schrödinger é uma exceção para a regra porque possui um termo extra devido ao potencial $V(\vec{r})$. O laplaciano pode ser aplicado em sistemas de coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{62}$$

em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi}, \tag{63}$$

ou em coordenadas cilindricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{64}$$

Para uma membrana presa a um aro circular (condições de contorno) a coordenada cilíndrica é a mais conveniente. A solução para sistemas de coordenadas cilíndricas assume a seguinte forma

$$u(\vec{r}) = u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \tag{65}$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}, \tag{66}$$

ao escolher

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \;\Rightarrow\; \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \tag{67}$$

e

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\alpha^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial Z^2} + \alpha^2 Z = 0, \tag{68}$$

que leva à

$$\rho^2\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial R}{\partial \rho} + (\beta^2\rho^2 - m^2)R = 0, \tag{69}$$

em que $\beta^2 = k^2 + \alpha^2$. A equação em Z é resolvida tanto por funções trigonométricas quanto por funções exponenciais. A equação radial (em R) é

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - m^2)\right] J_m(z) = 0, \tag{70}$$

em que $J_m(z)$ é a função de Bessel cilindrica de ordem m. A solução dessa equação comporta-se como $(z/2)^m$ com $z \to 0$.

Para determinar frequências características e modos normais de vibração considere que a membrana está no plano xy ou $R\theta$, a amplitude de vibração encontrase em z e o centro da membrana foi escolhido como a origem das coordenadas.

Assim, da equação de onda

$$\nabla^2 z(\rho, \phi, t) = \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{71}$$

se a solução é dada por

$$z = F(\rho, \phi)T(t), \tag{72}$$

o que implica em

$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = \frac{1}{\nu^2}\frac{d^2T}{dT^2} = -k^2, \tag{73}$$

teremos

$$\ddot{T}k^2\nu^2 = 0, \tag{74}$$

e a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0. \tag{75}$$

Ao escolher

$$F(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \tag{76}$$

a equação de Helmholtz fica

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 = 0, \tag{77}$$

e pode ser separada em

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -n^2 \ \Rightarrow \ \frac{d^2\Phi}{d\Phi^2} + n^2\Phi = 0, \tag{78}$$

para obter

$$\rho^2\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + (k^2\rho^2 - n^2)R = 0. \tag{79}$$

As soluções são

$$\Phi(\phi) = asin(n\phi) + bcos(n\phi), \tag{80}$$

e

$$T(t) = csin(k\nu t) + dcos(k\nu t), \tag{81}$$

em que n deve ser um inteiro. Então

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi). \tag{82}$$

Não tem nenhum sentido físico tomar uma solução com 2π no lugar de ϕ e $R(\rho) = J_n(k\rho)$. Não há contribuição da solução $N_n(k\rho)$ porque ela é singular em $\rho = 0$, que é o centro da membrana. Assim a solução para a membrana circular é

$$z(\rho, \phi, t) = J_n(k\rho)[asin(n\phi) + bcos(n\phi)][csin(k\nu t) + dcos(k\nu t)]. \tag{83}$$

Em $\rho = 1$, a condição de contorno é $z = 0$ para todo $\phi, t \Rightarrow J_n(k) = 0$, $k = k_{mn}$. A solução mais geral é então

$$z = \sum_{mn} J_n(k_{mn}\rho)[a_{mn}sin(n\phi) + b_{mn}cos(n\phi)][c_{mn}sin(k_{mn}\nu t) + d_{mn}cos(k_{mn}\nu t)]. \tag{84}$$

Para completar a solução desse problema é necessário usar uma Série de Fourier dupla em ϕ e t para determinar os valores permitidos (n, m) e os coeficientes correspondem as condições iniciais de posição e velocidade da membrana. Na membrana circular também há modos com frequências características

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{k_{mn}\nu}{2\pi}. \tag{85}$$

Há um conjunto infinito de modos e frequências duplas. Todas as frequências são diferentes e não iguais a múltiplos de um fundamental como uma corda vibrante. O exemplo `drumhead.m` gera os modos normais de um tambor:

```
Q = input('[m,n,ampl] :' ); m = Q(1);n=Q(2); ampl=Q(3);
kval = zeros(3,3);
kval(1,:) = [2.40483,5.52008,8.65373];
kval(2,:) = [3.83171,7.01559,10.17347];
kval(3,:) = [5.13562,8.41724,11.61984];
[TH,R] = meshgrid((0:5:360)*pi/180,0:.05:1);
Z = ampl*besselj(n,kval(m+1,n+1)*R).*cos(n*TH);
[X,Y,Z] = pol2cart(TH,R,Z); surf(X,Y,Z); axis([-1 1 -1 1 -1,1])
```

Veja este exemplos,

```
Command Window
>> drumhead
[m,n,ampl] :[0,0,0.5]
```

4 Rudimentos de Música

O som provém da vibração de um corpo e tem quatro propriedades importantes: frequência; a amplitude; timbre e duração. Música é o efeito produzido por combinações de durações de altura. Altura, refere-se à forma como o ouvido humano percebe a frequência fundamental dos sons, as baixas frequências como sons graves e as mais altas como sons agudos. Sendo assim, música é a combinação de som e tempo. Toda música contêm três elementos fundamentais: *melodia*, *harmonia* e *ritmo*. A melodia é a combinação de sucessivos sons com propriedades distintas. A harmonia é a combinação dos sons simultâneos, acordes. O ritmo é a forma como são dispostos os sons e silêncios; é o que produz a pulsação da música. A representação das propriedades do som é expressa através de uma escrita própria. A escrita musical é realizada na pauta musical com figuras e sinais que representam as características de cada nota.

4.1 Notas na pauta musical

Determinados sons são representados como uma ou mais notas musicais; cada nota representa um tom ou semitom. Existem 12 notas musicais, constituídas por 7 naturais e 5 acidentes. Cada nota natural tem uma designação: *Dó*, *Ré*, *Mi*, *Fá*, *Sol*, *Lá*, *Si* e podem ser representadas no formato anglosaxônico C, D, E, F, A, B, para as notas de Dó a Si, respectivamente.

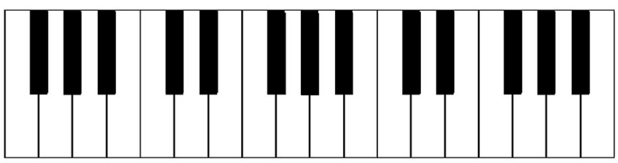

Figura 2: *Exemplo de três oitavas nas teclas do piano.*

Os acidentes são simbolizados como sendo a nota natural aumentada ou diminuída de 1/2 tom com sustenido (#) ou bemol (b), respectivamente. Um sustenido eleva a nota natural a um semitom enquanto um bemol baixa a nota um semitom. Considere como exemplo o teclado do piano, as notas naturais correspondem às teclas brancas e as pretas correspondem aos acidentes.

Embora existam 12 notas, um instrumento como o piano, por exemplo, possui mais do que 12 teclas. O conjunto de 12 notas é chamado uma oitava, as 12 notas são repetidas em todas as oitavas. Num piano, o conjunto de 12 teclas (ou as oitavas), possui sons graves na extremidade à esquerda, e sons mais agudos na extremidade direita.

A pauta musical é o conjunto de cinco linhas horizontais paralelas e equidistantes, e os quatro espaços entre elas. As linhas são contadas de baixo para cima. As notas musicais que representam os sons musicais são escritas nestas linhas e espaços. Por ser o número de notas bem superior ao número de linhas e espaços da pauta é necessário usar três claves: de Sol; de Fá e de Dó. Também são utilizadas linhas e espaços suplementares, que são linhas e espaços que ficam acima ou abaixo da pauta para anotar as notas em alturas que não podem ser escritas normalmente na pauta numa determinada clave.

A clave é um sinal usado no início da pauta para determinar o nome e a altura das notas, além disso, ela divide a gama de notas em graves, médias e agudas. Para anotar os sons do piano, por exemplo, é necessário usar duas claves, a clave de Fá para as notas graves (lado esquerdo do piano) e a de Sol para as notas agudas (lado direito do piano). As notas de um saxofone alto são escritas em uma única clave, a de Sol. As notas do contra-baixo são escritas na clave de Fá e a bateria é escrita na clave Neutra (ver Fig. 5).

A *Clave Neutra* ou *clave de percussão*, usualmente usa a seguinte notação para a bateria, em que h é o *hi-hat* tocado com o pé; B é o bumbo; F é o surdo; S é a caixa; T é o tom; t é o tom menor; R é o *ride*; C é o prado *crash*; e H é o *hi-hat* tocado com a baqueta. A *Clave de Sol* é utilizada para os sons agudos e a nota sol é anotada na segunda linha. A *Clave de Fá* é utilizada para os sons graves e a nota fá é anotada na quarta linha. A *Clave de Dó* é utilizada para os sons médios e tem sido anotada na terceira linha.

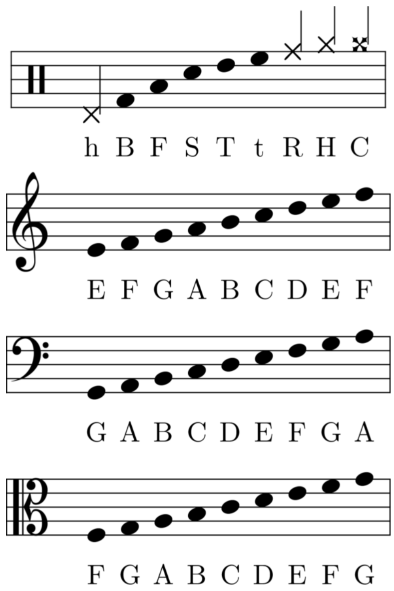

Figura 3: *Na clave de percussão a caixa é escrita no terceiro espaço. Na clave de sol a nota G é escrita na segunda linha. Na clave de Fá a nota F é escrita na quarta linha. Na clave de Dó a nota C é anotada na terceira linha.*

Em termos físicos, o som corresponde a uma vibração de determinada frequência. Consequentemente uma nota musical representa uma vibração numa frequência específica que é identificada como uma das 12 notas. Por convenção, a nota (Lá) foi escolhida como frequência de referência $440Hz$ (na *terceira oitava*). Para obter a mesma nota numa oitava acima (na quarta oitava), a frequência da nota da oitava anterior deve ser multiplicada por dois. Uma partitura musical, em última análise, é uma representação do som no plano tempo/frequência.

4.2 Figuras e duração

Duração é o intervalo de tempo em que um fenômeno persiste. Sons musicais têm durações diferentes. Estas durações são valores, representadas por figuras gráficas de notação musical. Para cada figura musical existe uma pausa correspondente, usada em momentos de silêncio. A duração de cada uma das figuras depende da assinatura de tempo que define qual nota deve ser tomada como unidade de tempo (pulsos) e quantas unidades existem em cada compasso. Na terminologia musical, o tempo também é o nome dado para o pulso básico subjacente de uma canção. Cada clique no metrônomo corresponde a um tempo. Os tempos são agrupados em quantidades iguais dentro de divisões fixas conhecido como compasso. O tempo define o ritmo da música e é medido em batidas por minuto (BPM). A pausa na partitura também tem a sensação e o valor de uma figura musical, portanto, é considerada como um tempo.

O tempo musical organiza, independentemente do ritmo, ou qualquer outra propriedade da música ou som, o evento de som, ou seja, o espaço entre um som musical e o próximo som, ou silêncio. O tempo musical depende da duração de sons ou de pausas e intervalo entre eles, e a propriedade que explica esse fenômeno sonoramente é a duração. A Tabela 1 mostra o valor e a duração das principais figuras musicais.

Figura	Nome	Pausa	Duração
𝅝	Semibreve	𝄻	1
𝅗𝅥	Mínima	𝄼	1/2
𝅘𝅥	Semínima	𝄽	1/4
𝅘𝅥𝅮	Colcheia	𝄾	1/8
𝅘𝅥𝅯	Semicolcheia	𝄿	1/16
𝅘𝅥𝅰	Fusa	𝅀	1/32

Figura 4: Tabela de Valores e durações das figuras musicais.

4.3 Métrica

Um ritmo musical pode ser distinguido, memorizado e reproduzido independentemente do tom e timbre de sua música original e a aprendizagem do ritmo depende do desenvolvimento de uma gama de habilidades cognitivas. O ritmo é percebido dentro da tradição tonal da música ocidental, como a união de dois elementos ou estruturas chamadas de agrupamentos e métrica. Devido aos agrupamentos é possível organizar um dado evento musical percebido em uma variedade de segmentos que são construídos a partir da união de notas que formam temas, ou grandes porções de junção, que dão origem a formas musicais.

A métrica é concebida como uma alternância regular de elementos fortes e fracos, chamado de pulso. Embora agrupamentos e métrica sejam teoricamente considerados como instâncias separadas, vale ressaltar que é a união desses dois elementos que nascem as estruturas rítmicas mais estáveis, essenciais para qualquer estilo de dança, tais como a valsa ou o tango, que tem padrões instantaneamente reconhecíveis de batidas construídas sobre um ritmo característico. Uma linha musical é dividida em medidas marcadas por pulsos representados por uma fórmula de compasso.

A fórmula de compasso é escrita no início da composição de cada uma de suas seções. O número superior indica o número de notas por compasso e o número inferior indica o valor de cada nota. O ritmo das notas são agrupados objetivamente dentro dos compassos. O compasso é o elemento que permite que um ouvinte organize o ritmo de uma música. Os compassos podem ser classificadas de duas maneiras. A primeiro leva em conta o tipo de divisão sofrida por cada batida do compasso: simples ou compostos. Compasso simples é um compasso cujo tempo possa ser dividido por dois ou a unidade de tempo do compasso pode ser naturalmente dividida em duas partes iguais.

Pode ser binária, ternária ou quaternária. O compasso composto é um compasso de tempo que pode ser dividido por três ou que a unidade de tempo possa ser composta em três partes iguais.

O segundo tipo de classificação leva em conta o número de vezes que o compõem: binário; ternário; quaternário e alternado. O compasso binário consiste em dois toques, sendo o primeiro forte e o segundo fraco. Podem ser classificados como simples (8/2, 4/2, 2/2) ou compostos (6/16, 6/8, 6/4). O compasso ternário é formado por três toques, o primeiro forte, o segundo e o terceiro fraco. Podem ser classificados como simples (8/3, 4/3, 3/2) ou composto (16/9, 8/9, 4/9). O compasso quaternário é formado por quatro toques, o primeiro forte, o segundo fraco, o terceiro moderado e o quarto fraco. Pode ser classificado como simples (8/4, 4/4, 4/2) ou composto (12/16, 12/8, 12/4).

O compasso alternado é formado pela junção de dois ou mais diferentes compassos. O compasso 5/4, por exemplo, pode ser gerado pela fusão dos compassos 2/4 + 3/4 ou ao contrário 3/4 + 2/4. No Matlab, o andamento de uma música pode ser determinado como:

```
% formula de compasso: 2/4
% minima = 108 BPM,
BPM = 108; % Beats por minuto
M = 60; % 1 minuto
FS = 44100; % Frequencia de Amostragem (Hz)
```

4.4 Introdução à síntese sonora

Para criar um tom puro no computador é necessário avaliar a função $y(t) = \sin(2\pi f t)$, como uma *função discreta* de t, em intervalos de tempo iguais. Estes intervalos de tempo devem ser suficientemente pequenos para obter uma forma de onda suave. O quão pequeno deve ser o intervalo segue o critério de Nyquist).

Se t é o tempo em segundos, o período é de $T = 1/f$, este intervalo de tempo é chamado de *intervalo de amostragem* t_s e o processo de dividir uma onda contínua e especificar apenas pontos discretos de tempo, é chamado de *amostragem.* Devemos, portanto, ter uma *frequência de amostragem*, $f_s = 1/t_s$.

Uma maneira eficiente de obter sons semelhantes a instrumentos acústicos com espectros complexos é por síntese sonora. A síntese aditiva é uma técnica que cria tons pela soma de sons simples (série de Fourier). A síntese por modulação de frequência, ou síntese FM, utiliza os parâmetros: frequência portadora f_c; frequência de modulação f_m e desvio de pico d. A equação para uma onda com frequência modulada, para obter sons, é dada pela equação

$$e = A\sin[\alpha + I\sin(\beta t)] \tag{86}$$

em que e é a amplitude instantânea da onda portadora modulada; α é a frequência portadora (em rad/s); β é a frequência de modulação (em rad/s), e a relação entre a frequência modulação e desvio de pico, $I = d/f_m$, é chamada de índice de modulação. As amplitudes de onda portadora e componentes são determinados pelas funções de Bessel de primeiro tipo $J_n(I)$ de ordem n, em que o argumento é o índice de modulação.

O caráter da evolução temporal das componentes espectrais é de fundamental importância na determinação do timbre.

A teoria clássica da timbre considera como principais características: o envelope da amplitude da onda e a magnitude do envelope espectral. O envelope da amplitude revela características do tipo de oscilação e do tipo de força motriz. Há quatro componentes para o envelope de som: ataque, decaimento, sustentação e relaxamento. O ataque indica o tempo que o som leva para atingir o seu nível máximo desde o nível zero. O decaimento é como um som desaparece. Sustentação é o intervalo de tempo em que o valor de pico é mantido. O relaxamento é o tempo que o som leva para desaparecer depois que a nota é tocada. Com as iniciais desses passos é criado um envelope com o nome de ADSR. Existem envelopes mais complexos, com mais passos intermediários, mas geralmente são variações do mesmo conceito.

O envelope da magnitude espectral descreve como a energia é distribuída ao longo do domínio da frequência. O sistema acústico da maioria dos instrumentos musicais consiste de uma fonte de excitação e um ressonador. As frequências de ressonância, que dependem do tamanho e forma do material ressonador, enfatizam certas regiões espectrais e amplificam algumas freqências harmônicas. Assim, o envelope espectral de um instrumento exibe picos característicos, chamados de formantes, localizados em determinadas regiões de frequência.

5 Sinfonia N^o5 de Beethoven

A Sinfonia N^o5 em Dó menor Op.67 de Beethoven, foi escrita entre 1804 e 1808, é uma das composições mais populares e mais conhecidas em todo repertório da Música Erudita Européia, assim como é também uma das sinfonias mais executadas da história, mesmo após dois séculos de sua criação. Trata-se da primeira sinfonia do autor composta em tonalidade menor, o que só voltaria a acontecer em 1824 com a Sinfonia N^o9, em Ré menor op.125.

A Sinfonia N^o5 em Dó menor ainda hoje é considerada como um *monumento* da criação artística. Estudiosos da música erudita afirmam que a 5^a Sinfonia é, por si só, um resumo de tudo o que representa Beethoven. Tudo o que ele fez antes e depois dela estaria sintetizado nessa obra, com todos os aspectos *beethovianos*, sua força, tristeza e grandiosidade. Segundo próprio Beethoven:

Parecia-me impossível deixar o mundo antes de ter dado a ele tudo o que ainda germinava em mim.

Os quatro movimentos constituem a particularidade de uma homogeneidade orquestral, sendo que, ao mesmo tempo, um exemplo de alternância. O primeiro movimento, revela grande tensão, tensão essa denunciada pelas cordas, eleva um dramatismo extremo. O segundo movimento revela solenidade; uma marcha fúnebre que se eleva pela sua emoção e beleza. O terceiro andamento, uma crispação. O quarto movimento: magnificência.

Mesmo quem não costuma escutar música clássica já ouviu, numerosas vezes, o primeiro movimento da 5^a Sinfonia de Beethoven. O *pam-pam-pam-pam* que abre uma das mais famosas composições da história.

A orquestra descrita para a peça compõe-se dos seguintes instrumentos:

Família de Instrumentos de Madeiras:

piccolo (apenas no 4^o movimento)

2 flautas

2 oboés

2 clarinetes em si bemol e dó

2 fagotes

contrafagote (apenas 4^o movimento)

Família de Instrumentos de Metais:

2 trompas em mi bemol e dó

2 trompetes

3 trombones (alto, tenor e baixo, apenas 4o movimento)

Percussão:

tímpanos (em sol e dó)

Família de Instrumentos de Cordas:

violinos (I)

violinos (II)

violas

violoncelos

contrabaixos

A seguir, é apresentada a síntese sonora de alguns instrumentos, no *software Matlab*, dos movimentos: *Allegro con brio*; *Andante con moto*; *Scherzo Allegro* e *Allegro - Presto*.

5.1 *Allegro con brio*

A exposição do tema é feita a partir do motivo central apresentado nos primeiros compassos da sinfonia. Do primeiro ao quinto compasso, o tema já introduz uma grande tensão, cria um ambiente de expectativa, como se fosse um anúncio da chegada de algo. O motivo gerador é composto por apenas quatro notas, sendo que ao observarmos de forma vertical e a cada compasso, é executada uma nota por vez e com total simetria rítmica.

A instrumentação neste momento é composta por clarinetas e todo o naipe de cordas. Violinos e clarinetas em uníssono, separados das violas e contrabaixos por uma oitava, e dos violoncelos por duas oitavas. Violas e contrabaixos em uníssono, separados dos violoncelos por uma oitava. A introdução do tema, que ocorre nos primeiros cinco compassos tem função preparatória, principalmente pelo uso exacerbado de fermatas (compassos 2 e 5).

Figura 5: *Os 5 primeiros compassos dos violinos I e II da* 5^a *Sinfonia.*

Com o auxílio da partitura, ou parte dela (figura 5), é fácil identificar as notas

G G G D#

G G G D

É possível afirmar que o clima criado tem ligação direta com a relação de intervalo existente na exposição temática, pois existem duas terças descendentes em tais compassos, uma maior (**G - Eb**, compassos 1 para 2) e outra menor (**F - D**, compasso 3 para 4).

Dois intervalos que geram sensações distintas, mormente quando em sequência. A indicação de dinâmica também é fator que influencia a criação de tal clima, visto que a orquestra deve tocar fortíssimo, marcando bem a presença do motivo. O movimento harmônico presente nos compassos iniciais (1 - 5) é da região dominante para mediante e da subdominante para supertônica (**G-Eb-F-D**).

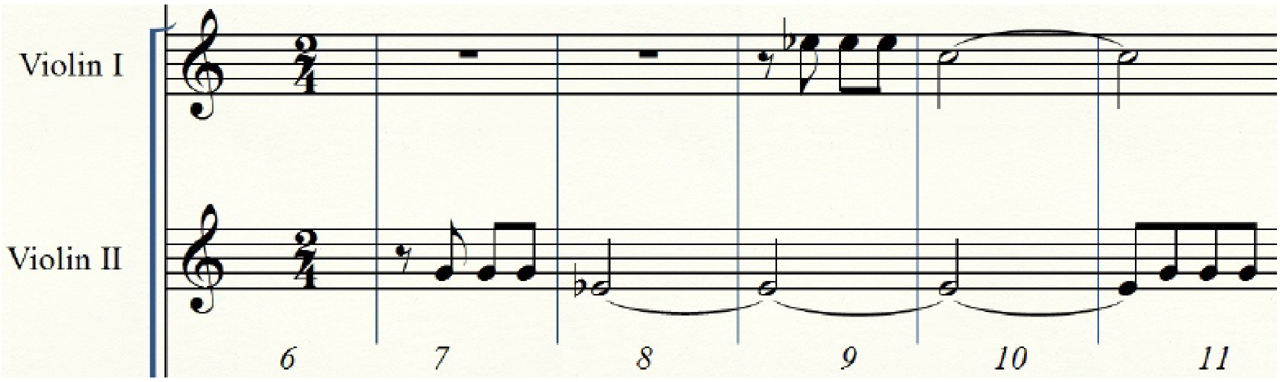

Figura 6: *Compassos 6 ao 10 dos violinos I e II.*

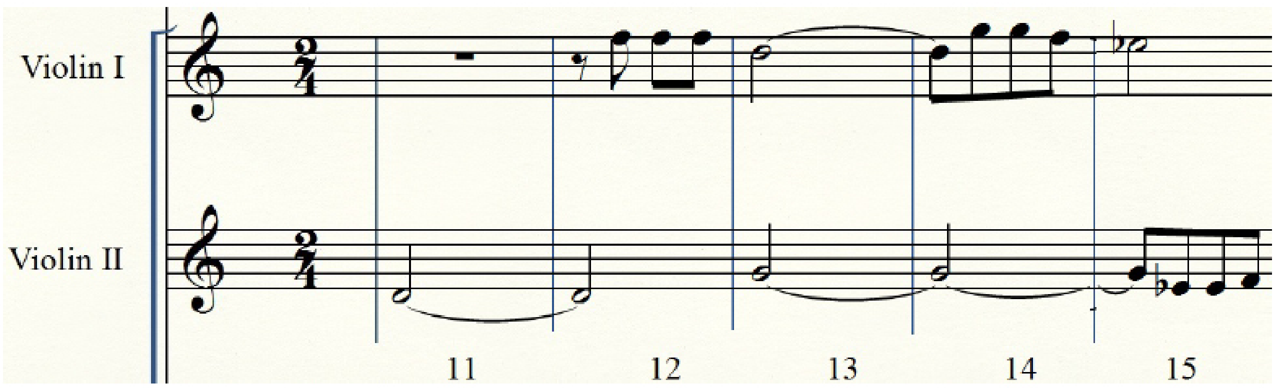

Figura 7: *Compassos 11 ao 15 dos violinos I e II.*

Figura 8: *Compassos 16 ao 21 dos violinos I e II.*

Nas figuras **??** e 7, nos compassos 11 ao 21, o violino I executa

Eb E E C C

e o violino II executa

Eb E E C C

.

Do compasso 6 - 21 ocorre a primeira parte do desenvolvimento do tema apresentado. A estrutura rítmica é mantida, três colcheias e uma mínima. Nesta parte inicial do desenvolvimento, o mesmo motivo aparece, alternadamente, nos violinos (I e II) e violas, enquanto fagotes, violoncelos e violinos/violas, alternadamente, apresentam acompanhamento harmônico. Fagotes e violoncelos executam a mesma linha melódica em uníssono, ambos executam a nota Dó, afirmando, neste momento, a estabilidade harmônica da sinfonia na região tônica.

Cabe ressaltar que o desenvolvimento temático é caracterizado por uma alteração de dinâmica muito importante, influenciando mais ainda na formação do clima da peça. No momento inicial do desenvolvimento, é indicado que se execute piano (comp. 6 - 8), mas logo a frente a indicação é piano crescendo (comp. 18) e forte (comp. 19). Do compasso 6 ao 10.

Do compasso 7 - 21, pelo fato de fagotes e violoncelos se encontrarem em uníssono, caminham sempre em movimento direto, por oitavas paralelas. Entre os compassos 14 e 18, o tema, em desenvolvimento, se apresenta em forma de pergunta e resposta entre violinos I e violinos II/violas. Tal forma é caracterizada pelo motivo de os dois grupos executarem as mesmas notas, porém em movimentos opostos, enquanto um é ascendente, o outro é descendente. Durante a seção de desenvolvimento, a harmonia transita entre as regiões dominante e tônica, havendo apenas um momento de potencial instabilidade no compasso 20, quando surge um trítono (**C - F**) de função preparatória. O tema desemboca nos três acordes executados *tutti* nos compassos 19, 20 e 21, que finalizam esta pequena introdução e desenvolvimento, preparando a volta do motivo gerador através da dominante (compasso 22).

Para realizar a síntese sonora, primeiro, as notas devem ser definidas no *Matlab*.

```

% Frequencias das notas em Hz
% (Escala crom tica igualmente temperada)
% f = 2^(n/12); ex: f_G = 391.99Hz;
```

Em seguida, o andamento deve ser estabelecido e os valores das figuras e suas respectivas pausas devem ser definidos.

```
% formula de compasso: 2/4
% minima = 108 BPM,
BPM = 108; % Beats por minuto
M = 60; % 1 minuto
FS = 44100; % Frequencia de Amostragem (Hz)
TS = 1/FS; % intervalo
D = M/BPM;
% Valores
semibreve = 0:TS:(4*D);
minima = 0:TS:(2*D); % half-note
seminima = 0:TS:(D); % quarter-note
colcheia = 0:TS:(D/2); % eigth-note
semicolcheia = 0:TS:(D/4); % sixteenth-note;
% Pausas
psemibreve = 0.001*sin(2*pi*1*semibreve);
pminima = 0.001*sin(2*pi*1*minima);
pseminima = 0.001*sin(2*pi*1*seminima);
pcolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*colcheia);
psemicolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*semicolcheia);
```

Então é só identificar as notas

```
% Compassos 1 ao 5 dos violinos I e II.
gama = 15; % Fator de amortecimento
G_colcheia = sin(2*pi*f_G*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
F_colcheia = sin(2*pi*f_F*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
Dsus_seminima = sin(2*pi*f_Dsus*seminima).*exp(-gama*sem nima);
D_colcheia = sin(2*pi*f_D*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
compassos1ao5_violino_I = [pcolcheia,G_colcheia,G_colcheia,
   G_colcheia,...
Dsus_seminima,...
pcolcheia,F_colcheia,F_colcheia,F_colcheia,...
D_colcheia,...
D_colcheia];
compassos1ao5_violino_II = compassos1ao5_violino_I;
compassos1ao5\_violinos = [compassos1ao5_violino_I +
   compassos1ao5_violino_II];
```

Agora é só tocar utilizando o comando `sound`.

```
Command Window
>> sound(compassos1ao5, FS)
wavwrite(compasos1ao5,'compassos1ao5_violinos.wav');
```

Veremos como isso pode ser feito com outras partes da sinfonia.

5.2 *Andante con moto - Più mosso - Tempo I*

Este movimento é um tema lírico com uma ressonância hinológica, até mesmo festiva, recordando permanentemente o tom um tanto dramático do primeiro tema. Os dois elementos temáticos são a base dos processos variacionais, primeiro lírico e temperado e, em última análise, expressa felicidade.

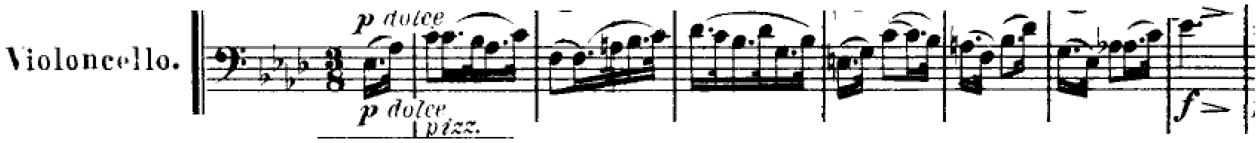

Figura 9: *Os 8 primeiros compassos de violoncelo do segundo movimento.*

Vamos, agora, escrever o código para tocar as notas dos 8 primeiros compassos do violoncelo:

```
% frequencia relativa as notas %
f_C2 = 130.812775;
f_C2st = 138.591324;
f_Db2 = 138.591324;
f_D2 = 146.832367;
f_Dst = 155.563492;
f_E2b = 155.563492;
f_E2    = 164.813782;
f_F2    = 174.614105;
f_F2st = 184.997208;
f_G2b = 184.997208;
f_G2 = 195.997711;
f_G2st = 207.652344;
f_A2b = 207.652344;
```

```
f_A2    = 220;
f_A2st = 233.081848;
f_B2b = 233.081848;
f_B2 = 246.941635;
f_C3 = 261.625519;
f_C3st = 277.182648;
f_D3b = 277.182648;
f_D3 = 293.664734;
f_D3st = 311.126984;
f_E3b = 311.126984;
f_E3 = 329.627533;
f_F3 = 349.228241;
f_F3st = 369.994385;
f_G3b = 369.994385;
f_G3 = 391.995392;
f_G3st = 415.304688;
f_A3b = 415.304688;
f_A3 = 440;
f_A3st = 466.163788;
f_B3b = 466.163788;
f_B3 = 493.883301;
f_C4 = 523.251099;
f_C4st = 554.365234;
f_D4 = 587.329529;
f_D4st = 622.253906;
f_E4 = 659.255127;
```

```
f_F4 = 698.456482;
f_F4st = 739.988831;
f_G4 = 783.990845;
f_G4st = 830.609375;
f_A4 = 880;
f_A4st = 932.327576;
f_B4 = 987.766602;
f_C5 = 1046.502075;
f_C5st = 1108.730591;
f_D5 = 1174.659058;
f_D5st = 1244.507935;
f_E5 = 1318.510254;
f_F5 = 1396.912964;
f_F5st = 1479.977539;
f_G5 = 1567.981812;
f_G5st = 1661.21875;
f_A5 = 1760;
f_A5st = 1864.654785;
f_B5 = 1975.533325;
f_C6 = 2093.004395;
f_C6st = 2217.460938;
f_D6 = 2349.318115;
f_D6st = 2489.015625;
f_E6 = 2637.020264;
f_F6 = 2793.825928;
f_F6st = 2959.955078;
```

```
f_G6 =  3135.963135;
f_G6st = 3322.4375;
f_A6 = 3520;
f_A6st = 3729.30957;
f_B6 =  3951.066895;

BPM = 108; % Beats por minuto
M = 60; % 1 minuto
FS = 44100; % Frequencia de Amostragem (Hz)
TS = 1/FS; % intervalo
D = M/BPM;

semibreve = 0:TS:(4*D);
minima = 0:TS:(2*D);
minimapont = 0:TS:(3*D); % minima pontuada
seminima = 0:TS:(D);
seminimapont = 0:TS:(1.5*D); % seminima pontuada
colcheia = 0:TS:(D/2);
colcheiapont = 0:TS:((D/2)+(D/4)); % colcheia pontuada
semicolcheia = 0:TS:(D/4);
semicolcheiapont = 0:TS:((D/4)+(D/8)); % Semicolcheia pontuada
fusa = 0:TS:(D/8);
semifusa = 0:TS:(D/16);
ligadura_C _SCP = 0:TS:((D/2)+(D)+(D/8)); % colcheia + semicolcheia + fusa

```

```
psemibreve = 0.001*sin(2*pi*1*semibreve);
pminima = 0.001*sin(2*pi*1*minima);
pminimapont = 0.001*sin(2*pi*1*minimapont); % pausa minima pontuada
pseminima = 0.001*sin(2*pi*1*seminima);
pseminimapont = 0.001*sin(2*pi*1*seminimapont);
pcolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*colcheia);
psemicolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*semicolcheia);
psemicolcheiapont = 0.001*sin(2*pi*1*semicolcheiapont);

% Equacoes das frequencias %
gama = 5; % fator de amorteciemnto

C2_minima = sin(2*pi*f_C2*2*minima).*exp(-gama*minima);
C2_seminima = sin(2*pi*f_C2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
C2_colcheia = sin(2*pi*f_C2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
C2_semicolcheia = sin(2*pi*f_C2*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
C2st_seminima = sin(2*pi*f_C2st*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
C2st_colcheia = sin(2*pi*f_C2st*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
C2st_semicolcheia = sin(2*pi*f_C2st*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
C3_minima = sin(2*pi*f_C3*2*minima).*exp(-gama*minima);
C3_seminima = sin(2*pi*f_C3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
C3_colcheia = sin(2*pi*f_C3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
C3_ligadura _C _SCP = sin(2*pi*f_C3*2*ligadura_C_SCP).*exp(-gama*
```

```
ligadura_C_SCP);
C3_semicolcheia = sin(2*pi*f_C3*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
C3st_seminima = sin(2*pi*f_C3st*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
C3st_colcheia = sin(2*pi*f_C3st*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
C3st_semicolcheia = sin(2*pi*f_C3st*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
E2b_minima= sin(2*pi*f_E2b*2*minima).*exp(-gama*minima);
E2b_seminima = sin(2*pi*f_E2b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
E2b_colcheia = sin(2*pi*f_E2b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
E2b_semicolcheia = sin(2*pi*f_E2b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
E3b_minima= sin(2*pi*f_E3b*2*minima).*exp (-gama*minima);
E3b_seminima = sin(2*pi*f_E3b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
E3b_colcheia = sin(2*pi*f_E3b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
E3b_semicolcheia = sin(2*pi*f_E3b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
Db2_minima= sin(2*pi*f_Db2*2*minima).*exp(-gama*minima);
Db2_seminima = sin(2*pi*f_Db2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
Db2_colcheia = sin(2*pi*f_Db2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
Db2_semicolcheia = sin(2*pi*f_Db2*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
D3b_minima= sin(2*pi*f_D3b*2*minima).*exp(-gama*minima);
D3b_seminima = sin(2*pi*f_D3b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
D3b_colcheia = sin(2*pi*f_D3b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
A2b_minima= sin(2*pi*f_A2b*2*minima).*exp(-gama*minima);
```

```
A2b_seminima = sin(2*pi*f_A2b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
A2b_colcheia = sin(2*pi*f_A2b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
A2b_semicolcheia = sin(2*pi*f_A2b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
A3b_minima= sin(2*pi*f_A3b*2*minima).*exp(-gama*minima);
A3b_seminima = sin(2*pi*f_A3b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
A3b_colcheia = sin(2*pi*f_A3b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
A3b_semicolcheia = sin(2*pi*f_A3b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
B2b_minima= sin(2*pi*f_B2b*2*minima).*exp(-gama*minima);
B2b_seminima = sin(2*pi*f_B2b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
B2b_colcheia = sin(2*pi*f_B2b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
B2b_semicolcheia = sin(2*pi*f_B2b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
B3b_minima= sin(2*pi*f_B3b*2*minima).*exp(-gama*minima);
B3b_seminima = sin(2*pi*f_B3b*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
B3b_colcheia = sin(2*pi*f_B3b*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
B3b_semicolcheia = sin(2*pi*f_B3b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
D3b_semicolcheia = sin(2*pi*f_D3b*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
D2_minima = sin(2*pi*f_D2*2*minima).*exp(-gama*minima);
D2_seminima = sin(2*pi*f_D2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
D2_colcheia = sin(2*pi*f_D2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
D2_semicolcheia = sin(2*pi*f_D2*2*semicolcheia).*exp(-gama*semicolcheia);
```

```
D3_minima = sin(2*pi*f_D3*2*minima).*exp(-gama*minima);
D3_seminima = sin(2*pi*f_D3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
D3_colcheia = sin(2*pi*f_D3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
D3_semicolcheia = sin(2*pi*f_D3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
E2_minima = sin(2*pi*f_E2*2*minima).*exp(-gama*minima);
E2_seminima = sin(2*pi*f_E2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
E2_colcheia = sin(2*pi*f_E2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
E2_semicolcheia = sin(2*pi*f_E2*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
E3_minima = sin(2*pi*f_E3*2*minima).*exp(-gama*minima);
E3_seminima = sin(2*pi*f_E3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
E3_colcheia = sin(2*pi*f_E3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
E3_semicolcheia = sin(2*pi*f_E3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
F2_minima = sin(2*pi*f_F2*2*minima).*exp(-gama*minima);
F2_seminima = sin(2*pi*f_F2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
F2_colcheia = sin(2*pi*f_F2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
F2_semicolcheia = sin(2*pi*f_F2*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
F2_ligadura_C_SCP = sin(2*pi*f_F2*2*ligadura_C_SCP).*exp(-gama*
    ligadura_C_SCP);
F3_minima = sin(2*pi*f_F3*2*minima).*exp(-gama*minima);
F3_seminima = sin(2*pi*f_F3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
F3_colcheia = sin(2*pi*f_F3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
F3_semicolcheia = sin(2*pi*f_F3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
```

```
    semicolcheia);
G2_minima = sin(2*pi*f_G2*2*minima).*exp(-gama*minima);
G2_seminima = sin(2*pi*f_G2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
G2_colcheia = sin(2*pi*f_G2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
G2_semicolcheia = sin(2*pi*f_G2*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
G3_minima = sin(2*pi*f_G3*2*minima).*exp(-gama*minima);
G3_seminima = sin(2*pi*f_G3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
G3_colcheia = sin(2*pi*f_G3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
G3_semicolcheia = sin(2*pi*f_G3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
A3_minima = sin(2*pi*f_A3*2*minima).*exp(-gama*minima);
A3_seminima = sin(2*pi*f_A3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
A3_colcheia = sin(2*pi*f_A3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
A3_semicolcheia = sin(2*pi*f_A3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
A2_minima = sin(2*pi*f_A2*2*minima).*exp(-gama*minima);
A2_seminima = sin(2*pi*f_A2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
A2_colcheia = sin(2*pi*f_A2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
A2_semicolcheia = sin(2*pi*f_A2*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
B3_minima = sin(2*pi*f_B3*2*minima).*exp(-gama*minima);
B3_seminima = sin(2*pi*f_B3*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
B3_colcheia = sin(2*pi*f_B3*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
B3_semicolcheia = sin(2*pi*f_B3*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
```

```
B2_minima = sin(2*pi*f_B2*2*minima).*exp(-gama*minima);
B2_seminima = sin(2*pi*f_B2*2*seminima).*exp(-gama*seminima);
B2_colcheia = sin(2*pi*f_B2*2*colcheia).*exp(-gama*colcheia);
B2_semicolcheia = sin(2*pi*f_B2*2*semicolcheia).*exp(-gama*
    semicolcheia);
C3_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_C3*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
B2b_fusa = sin(2*pi*f_B2b*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
A2b_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_A2b*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
C3_fusa = sin(2*pi*f_C3*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
A2_fusa = sin(2*pi*f_A2*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
B2b_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_B2b*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
D3_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_D3*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
B2b_seminimapont = sin(2*pi*f_B2b*2*seminimapont).*exp(-gama*
    seminimapont);
D3_fusa = sin(2*pi*f_D3*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
G2_seminimapont = sin(2*pi*f_G2*2*seminimapont).*exp(-gama*
    seminimapont);
E2_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_E2*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
G2_fusa = sin(2*pi*f_G2*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
F2_fusa = sin(2*pi*f_F2*2*fusa).*exp(-gama*fusa);
B2b_colcheiapontuada = sin(2*pi*f_B2b*2*colcheiapont).*exp(-gama*
```

```
    colcheiapont);
G2_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_G2*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
E2_fusa = sin(2*pi*f_E2*2*fusa).*exp (-gama*fusa);
A2_semicolcheiapont = sin(2*pi*f_A2*2*semicolcheiapont).*exp(-
    gama*semicolcheiapont);
E3_seminimapont = sin(2*pi*f_E3*2*seminimapont).*exp(-gama*
    seminimapont);

% Compassos 1 ao 8 do Vionc %
compassos_1ao8 = [E2b_semicolcheia,A2b_semicolcheia,C3_colcheia,
    C3_semicolcheiapont,B2b_fusa,...
A2b_semicolcheiapont,C3_fusa,F2_ligadura _C_SCP,A2_fusa,
    B2b_semicolcheiapont,C3_fusa...
D3_semicolcheiapont,C3_fusa,B2b_seminimapont,D3_fusa,
    G2_seminimapont,B2b_fusa,...
E2_semicolcheiapont,G2_fusa,C3_ligadura_C_SCP,B2b_fusa,
    A2_semicolcheia,F2_fusa,...
B2b_colcheiapontuada,D3_semicolcheia,G2_semicolcheiapont,E2_fusa,
    A2_colcheia,A2_semicolcheiapont,...
C3_fusa,E3_seminimapont];

sound (compassos_ 1ao8, FS)
```

5.3 *Scherzo Allegro - Trio - Scherzo*

Este movimento tem uma forma livre, nem *scherzo* nem *intermezzo*, mas se constitui como um epílogo do dramatismo na Parte I e um prólogo da Parte IV. Este é considerado o momento-chave de toda a sinfonia, tanto psicologicamente quanto do ponto de vista da construção musical.

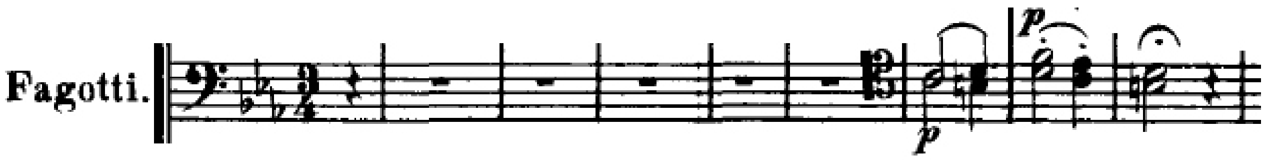

Figura 10: *Os 8 primeiros compassos de fagote do terceiro movimento.*

Vamos ouvir as notas dos 8 primeiros compassos do segundo movimento, tocados pelo fagote com o seguinte código:

```
% Frequ ncias 4   oitava
f_C=261.62557;
f_Cst=277.18263;
f_D=293.66477;
f_Dst=311.12698;
f_Eb=311.12698;
f_E=329.62756;
f_F=349.22823;
f_Fst=369.99442;
f_G=391.99544;
f_Gst=415.3047;
f_A=440;
f_Ast=466.16376;
f_Bb=466.16376;
```

```
f_B=493.8833;

%% Frequ ncias 3 oitava
f_B3=246.94165;

BPM=108; % Beats por minuto
M=60; %1 minuto
FS=44100; % Frequ ncia de amostragem (Hz)
TS=1/FS; % Intervalo
D=M/BPM;
% Valores
semibreve = 0:TS:(2*D);
minima = 0:TS:(D);
seminima = 0:TS:(D/2); % half-note
colcheia = 0:TS:(D/4); % quarter-note
semicolcheia = 0:TS:(D/8); % eigth-note
ligadura = 0:TS:((3/2)*D);
ligadura_C = 0:TS:((3/4)*D);
pontodeaumento_C = 0:TS:((D/4)+(D/8));

% Pausas
psemibreve = 0.001*sin(2*pi*1*semibreve);
pminima = 0.001*sin(2*pi*1*minima);
pseminima = 0.001*sin(2*pi*1*seminima);
pcolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*colcheia);
psemicolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*semicolcheia);
```

```

% Sintetiza o das notas
gama = 15;

C_minima = sin(2*pi*f_C*minima).*exp(-gama*minima);
D_seminima = sin(2*pi*f_D*seminima).*exp(-gama*seminima);
B3_seminima = sin(2*pi*f_B3*seminima).*exp(-gama*seminima);
D_minima = sin(2*pi*f_D*minima).*exp(-gama*minima);
F_minima = sin(2*pi*f_F*minima).*exp(-gama*minima);
C_seminima = sin(2*pi*f_C*seminima).*exp(-gama*seminima);
E_seminima = sin(2*pi*f_E*seminima).*exp(-gama*seminima);
B3_minima = sin(2*pi*f_B3*minima).*exp(-gama*minima);

acorde_DB3 = (D_seminima+B3_seminima);
acorde_DF = (D_minima+F_minima);
acorde_EC = (E_seminima+C_seminima);
acordeminima_DB3 = (D_minima+B3_minima);

compassos1ao8 = [pseminima,psemibreve,psemibreve,psemibreve,
   psemibreve,psemibreve,C_minima,acorde_DB3,acorde_DF,...
    acorde_EC,acordeminima_DB3,pseminima];

sound (compassos1ao8,FS);
```

5.4 *Allegro - Presto*

Este movimento traz muitos elementos novos que constituem uma surpresa genuína. Na exuberância e alegria da construção musical, aparece de repente um tema lírico - um oboé que se aproxima de uma lembrança, reminiscência. Este segmento leva um tema festivo que expressa alegria e vitória absoluta.

Figura 11: *Os últimos 8 compassos de tímpano do quarto movimento.*

Vamos fazer a síntese sonora das notas dos últimos 8 compassos, tocadas pelo tímpano.

```
clear all
%--baseado nas oitava de um piano--%
%----------PRIMEIRA-OITAVA---------------%
f_A1   = 27.5;
f_A1st = 29.135233;
f_B1   = 30.867708;
f_C1   = 32.703194;
f_C1st = 34.647823;
f_D1   = 36.708096;
f_D1st = 38.890873;
f_E1   = 41.203442;
f_F1   = 43.653526;
f_F1st = 46.249302;
f_G1   = 48.999424;
f_G1st = 51.91309;
```

```
%----------SEGUNDA-OITAVA------------%
f_A2   = 55;
f_A2st = 58.270466;
f_B2   = 61.735416;
f_C2   = 65.40638;
f_C2st = 69.295647;
f_D2   = 73.416199;
f_D2st = 77.781746;
f_E2   = 82.406876;
f_F2   = 87.307053;
f_F2st = 92.498604;
f_G2   = 97.998848;
f_G2st = 103.82618;
%--------TERCEIRA-OITAVA-------------%
f_A3   = 110;
f_A3st = 116.540947;
f_B3   = 123.470818;
f_C3   = 130.812775;
f_C3st = 138.591324;
f_D3   = 146.832367;
f_D3st = 155.563492;
f_E3   = 164.813782;
f_F3   = 174.614105;
f_F3st = 184.997208;
f_G3   = 195.997711;
f_G3st = 207.652344;
```

```
%-------------------------------%
%F rmula de Compasso: 2/4
%M nima = 108BPM
%-------------------------------%
BPM = 108;
M = 60; %1 minuto
FS = 44100; %Frequ ncia de amostragem
TS = 1/FS; %Intervalo
D = M/BPM;
%----------Valores---------------%
semibreve    = 0:TS:(4*D);
minima       = 0:TS:(2*D); %half-note
seminima     = 0:TS:(D);   %quarter-note
colcheia     = 0:TS:(D/2); %eigth-note
semicolcheia = 0:TS:(D/4); %sixeenth-note
%----------Pausas----------------%
psemibreve    = 0.001*sin(2*pi*1*semibreve);
pminima       = 0.001*sin(2*pi*1*minima);
pseminima     = 0.001*sin(2*pi*1*seminima);
pcolcheia     = 0.001*sin(2*pi*1*colcheia);
psemicolcheia = 0.001*sin(2*pi*1*semicolcheia);

gama = 15; %Fator de amortecimento

% Banco-de-Tempos
C1_seminima = sin(2*pi*f_C1*seminima).*exp(-gama*seminima);
```

```
C2_seminima = sin(2*pi*f_C2*seminima).*exp(-gama*seminima);

compassos1ao5_basso_I = [
    pminima, C1_seminima, pseminima, psemibreve,...
    C1_seminima, pseminima, psemibreve,...
    C1_seminima, pseminima, psemibreve,...
    pminima, C1_seminima, pseminima, psemibreve,...
    pminima, C1_seminima, pseminima, psemibreve
];
compassos1ao5_basso_II = compassos1ao5_basso_I;
compassos1ao5_basso = [compassos1ao5_basso_I +
   compassos1ao5_basso_II];

sound(compassos1ao5_basso,FS)
```

Agora que vimos os primeiros compassos de cada movimentos da 5^a Sinfonia de Beethoven, é possível realizar um trabalho em equipe para realizar a síntese sonora da sinfonia completa. A 5^a Sinfonia tem 628 compassos que podm ser divididos, em movimentos, por instrumentos ou de alguma outra maneira, para que cada aluno tenha uma parcela de contribuição para construir a síntese sonora da 5^a Sinfonia de Beethoven em Dó menor. Foi possível observar algumas imperfeições, como se as notas fossem cortadas. Isso acontece porque as notas foram escritas sem a parte de sustentação de uma nota, somente com ataque e decaimento. A execução ficaria muito melhor com a aplicação de um pacote ADSR. Outro fator interessante de trabalhar, para aperfeiçoar a síntese, é o timbre de alguns intrumentos.

Referências

[1] Alonso, M., Finn, E.J. Física: um curso universitário, Vol.2 - Campos e Ondas. *Editora Edigard Blücher Ltda*, São Paulo, 2^a ed., 1995.

[2] Helmholtz, H.L., On sensation of a Tone as a Physiological Basis for Theory of Music. *Cambridge University Press*, 2^a ed., 2009.

[3] Henrique, Luís. Acústica Musical. *Fundação Fundação Calouste Gulbenkian*, Lisboa, 2^a ed., 2002.

[4] Hewitt, M. Music Theory for Computer Musicians *Cengage Learning*, Stamford, 1^a ed., 2008.

[5] Med, B. Teoria da Música. *Musimed*, Brasilia, 4^a ed., 1996.

[6] Partituras dos quatro movimentos da Sinfonia N^o5 de Beethoven

[7] Rogers, C.R. Freedom to Learn for The 80's *C.E. Merrill Publishing Company*, Indianapolis, 1^a ed., 1983.

[8] Roederer, Juan G. Introdução à física e psicofísica da música. *Edusp*, 1998.