

Interferência e Difração

04/01/2017

Costuma-se dividir a Óptica em dois grandes ramos: a Óptica Geométrica, cuja ênfase reside exclusivamente no estudo geométrico dos raios de luz, sem buscar a justificativa desse traçado; e a Óptica Física, que estuda os fenômenos cuja compreensão exige a formulação de uma Teoria da Natureza da luz.

A formulação atual, afirma que a luz é constituída de fótons. O fóton tem massa de repouso nula, mas não existem fótons em repouso, eles só existem em movimento com velocidade c , segundo a equação de onda obtida a partir das leis de Faraday-Lenz e Ampère-Maxwell:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (01)$$

em que a velocidade c tem valor $(3 \times 10^8)^{1/2} \text{ m/s}$.

Entretanto, a luz não pode ser entendida somente por sua natureza ondulatória, ela também tem natureza corpuscular (dualidade onda-partícula). Porém, vamos nos restringir ao estudo dos fenômenos ondulatórios da luz.

Se fótons são partículas, cujo comportamento tem natureza ondulatória, então, a origem da luz é, de certa forma, semelhante a origem do som. Enquanto o som é produzido a partir de oscilações mecânicas, pode-se dizer que a luz origina-se de oscilações eletromagnéticas ou oscilações de cargas.

OU AINDA, ASSIM COMO NOSSOS OUVIDOS SÓ CONSEGUEM DETECTAR UMA PEQUENA FAIXA DO ESPECTRO SONORO (20 Hz - 20 KHz), NOSSOS OLHOS DETECTAM APENAS UMA ESTREITA FAIXA DO ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO CHAMADO DE espectro visível: $\begin{cases} 380 \text{ nm (violeta)} - 750 \text{ nm (vermelho)}; \\ 668 \text{ THz (violeta)} - 448 \text{ THz (vermelho)}. \end{cases}$

Então, se a luz tem características ondulatórias, deve ser claro que a refração e reflexão do fóton podem ser explicados pelo princípio de Huygens:

"TODOS OS PONTOS DE UMA FRENTE DE ONDA podem ser considerados fontes de ondas secundárias que se espalham em todas as direções com uma velocidade igual à propagação da onda".

Existem ainda, outros fenômenos que revelam o caráter ondulatório da luz, como a interferência e a difração, foco da nossa discussão.

ONDAS EM SENTIDOS OPPOSTOS GERAM ONDAS ESTACIONÁRIAS. ONDAS NO MESMO SENTIDO GERAM BATIMENTOS OU INTERFERÊNCIA. O FENÔMENO DA INTERFERÊNCIA OCORRE QUANDO DOIS OU MAIS MOVIMENTOS ONDULATÓRIOS COINCIDEM NO ESPAÇO E NO TEMPO, SENDO ASSIM, A INTERFERÊNCIA SEGUIR O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO.

PORTANTO, A INTERFERÊNCIA É O FENÔMENO COM ONDAS SUPERPOSTAS EM UMA MESMA REGIÃO DO ESPAÇO. COMO RESULTADO DESTA SUPERPOSIÇÃO DE CAMPOS, OCORRE VARIAÇÕES ESPACIAIS NA INTENSIDADE RESULTANTE. ESTAS VARIAÇÕES DE INTENSIDADE SÃO CHAMADAS DE FRANJAS DE INTERFERÊNCIA.

EMBORA A INTERFERÊNCIA SEJA UM FENÔMENO INERENTE AO CARÁTER ONDULATÓRIO DA LUZ, NO DIA-DIA, NÃO É COMUM OBSERVAR A INTERFERÊNCIA DE LUZ. POR EXEMPLO, AO ILUMINAR UMA SALA COM DIVERSAS LÂMPADAS NÃO SE OBSERVA FRANJAS DE INTERFERÊNCIA. ISTO OCORRE PORQUE AS FONTES DE LUZ (LÂMPADAS COMUM) UTILIZADAS NÃO SÃO COERENTES.

PARA OBTER INTERFERÊNCIA ENTRE ONDAS LUMINOSAS, GERADAS POR DUAS FONTES, COMO OBTIDO ENTRE DUAS FONTES DE ONDA NA SUPERFÍCIE DA ÁGUA NUMA PISCINA, É PRECISO QUE AS DUAS FONTES LUMINOSAS SEJAM COERENTES.

FONTES COERENTES, SÃO FONTES CUJA DIFERENÇA DE FASE É CONSTANTE E SUAS ONDAS PROPAGAM-SE COM MESMA FREQUÊNCIA, ^{MESMA FASE} E NO MESMO MEIO TÊM A MESMA VELOCIDADE c , CONSEQUENTEMENTE, O MESMO COMPRIMENTO DE ONDA.

No entanto, a luz se origina da oscilação dos elétrons nas camadas exteriores dos átomos e, com exceção do LASER, não há como controlar a fase das oscilações das fontes de luz usuais. Por isso, a obtenção experimental da interferência de luz é realizada com o experimento de Young.

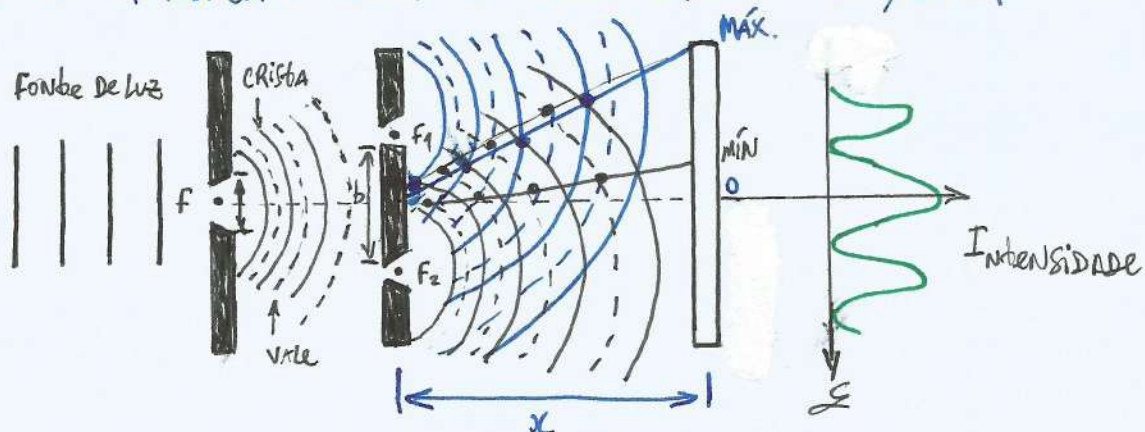


FIGURA 1 - Experimento de Young.

CONSIDERE DUAS ONDAS QUE PROPAGAM NA MESMA DIREÇÃO :

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos(Kx - \omega t + \phi_1) \\ y_2(x,t) = A_2 \cos(Kx - \omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (02)$$

A ONDA RESULTANTE SERÁ:

$$\Psi(x,t) = y_1 + y_2 = A \cos(Kx - \omega t + \phi)$$

em que $\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ é a diferença de fase entre as ondas, e a amplitude da onda resultante é dada pela lei dos cossenos:

$$A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \phi)^{1/2} \quad (03)$$

A intensidade (potência média) de uma onda é proporcional ao quadrado da amplitude da onda resultante ($I \propto A^2$).

Assim, a superposição de duas ondas harmônicas progressivas que propagam na mesma direção e sentido, é uma onda resultante do mesmo tipo, mas a intensidade é dada por:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi, \quad (04)$$

e geralmente é diferente da soma da intensidade das componentes, dependendo da diferença de fase ϕ . Este fenômeno chama-se interferência.

PARA $\phi = 2m\pi$; $\cos \phi = 1 \Rightarrow$ Interferência construtiva!

$$I = I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad (05)$$

PARA $\phi = (2m+1)\pi$; $\cos \phi = -1 \Rightarrow$ Interferência destrutiva!

$$I = I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \quad (06)$$

Com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Em particular, se $I_1 = I_2$, $I_{\max} = 4I_1$ e $I_{\min} = 0$.

As figuras de interferência são de extrema importância para determinação das características da radiação luminosa, originária da fonte de luz.

Difração, é o nome dado, historicamente, à transição oscilatória entre a luz e a sombra, quando a luz é obstruída por um obstáculo. Imagine um anteparo com uma abertura, ao olhar em detalhe a região de transição entre a luz e a sombra, observa-se que há oscilações de intensidades (máximos e mínimos) próxima à região da borda.

Se o anteparo tiver um orifício, a medida que o diâmetro desse orifício diminui, a onda que o atravessa vai ser cada vez mais esférica. Pode-se dizer que, difração é a tendência da onda a contornar obstáculos. A situação mais simples que podemos estudar, é a difração produzida por um feixe de luz monocromática que atravessa uma fenda estreita, conhecida como difração de Fraunhofer (fig. 2).

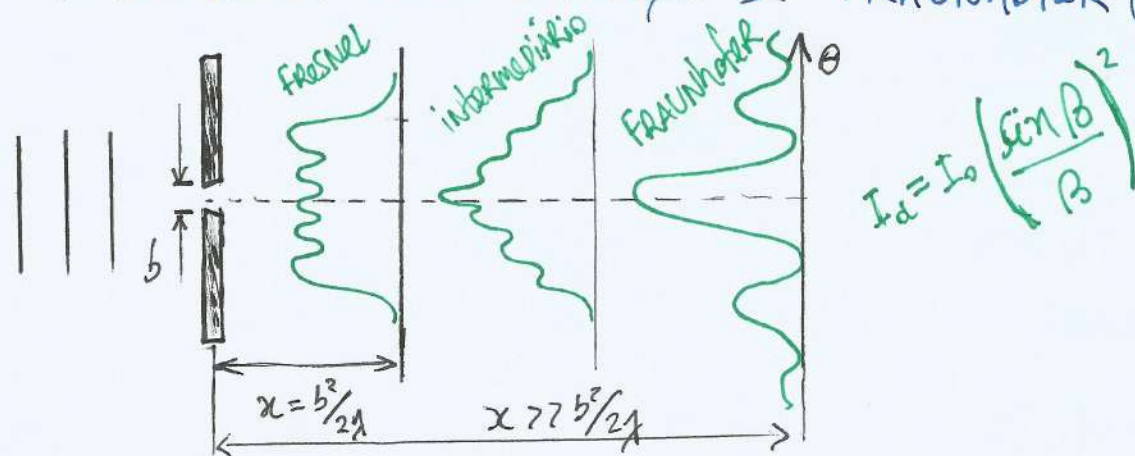


FIGURA 2 - Distribuição de intensidades da difração em função da distância x do anteparo à fenda.

De acordo com a difração de Fraunhofer, aberturas pequenas difratam a luz em ângulos grandes, enquanto que aberturas grandes em ângulos pequenos.

ANALOGAMENTE A INTERFERÊNCIA POR FENDA DUPLA, É POSSÍVEL ENCONTRAR UMA EQUAÇÃO GERAL PARA UMA REDE DE DIFRAÇÃO COM N FENDAS:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(N\gamma)}{N\sin(\gamma)} \right]^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (07)$$

Se temos uma fenda, $N=1$, obtemos a equação para a intensidade da difração de Fraunhofer:

$$I_d = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (08)$$

Se temos duas fendas, $N=2$ e $\sin(2\gamma) = 2\sin(\gamma)\cos(\gamma)$, obtemos a distribuição de intensidades devido a interferência:

$$I_i = I_0 \cos^2\gamma \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (09)$$

UMA APLICAÇÃO muito útil é a espectroscopia com redes de difração. Espectroscopia é a denominação da técnica baseada na análise de espectro, que utiliza um instrumento denominado espectroscópio. A dispersão (largura do espectro) produzida por uma rede de difração depende da largura d de cada fenda. Essa largura, depende do número de fendas que podem ser feitas em determinado material. Sua maior vantagem, é poder trabalhar com diferentes espectros.

Em química, a espectroscopia é utilizada para determinar a composição de certa substância, já que a radiação emitida é característica da substância que a emite. Em física, ela permite determinar os níveis de energia de um átomo ou molécula, ou ainda, examinar a estrutura molecular de um material.

O sistema para observar a interferência entre duas ou mais ondas de luz, é denominado interferômetro. Um fenômeno peculiar da aplicação de LASERS, é uma estrutura granular formada pelo espalhamento de um feixe de luz coerente numa superfície com rugosidade da ordem do comprimento de onda λ incidente. Essa estrutura granular é denominada "speckle".

Uma característica importante de speckles é que eles também são coerentes, com isso, podemos utilizá-los para fins interferométricos. Com a técnica de interferometria de padrão de speckle, é possível observar o fluxo contínuo de partículas como, por exemplo, as figuras de CHADNI PARA MEMBRANAS QUE VIBRAM (PLACAS OU TAMBORES), com a substituição do pó de Lycopodium por "grãos de luz" (speckles). Ou seja, trata-se de uma técnica de análise não destrutiva para modos de vibração, detecção de bolhas, fissuras, separação de compostos, deformações, determinação de campos de temperatura, com aplicações em diversas áreas.

1 – [1,00] Considere a oscilação dos campos elétrico e magnético no vácuo com direção de propagação ao longo do eixo x , com $E_{(r)}$ perpendicular à $B_{(r)}$. A partir da Lei de Faraday-Lenz e da Lei de Ampère-Maxwell, determine a equação de onda eletromagnética com velocidade de propagação c , esboce uma solução e defina o plano de polarização.

2 – [4,00] Considere agora que uma solução da equação de onda eletromagnética, ou melhor, uma luz monocromática de comprimento de onda λ , atravessa uma fenda de largura b e atinge um anteparo a uma distância x .

(a) Explique a condição de difração de Fraunhofer;

(b) Mostre que a distribuição da intensidade de luz sobre o anteparo é :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \text{com} \quad \beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

(c) Determine os pontos em que a intensidade de luz é nula, os correspondentes valores de y_n e defina o poder resolutivo da fenda;

(d) Determine a intensidade e a largura do máximo central e os três primeiros máximos sucessivos.



UFSM
Frederico Westphalen

2ª Prova de Física IV – Engenharia Ambiental – Prof. Nilson

Conteúdo: Ondas eletromagnéticas, difração e interferência.

3 – [2,00] Considere a difração e a interferência causada pela incidência de uma luz monocromática em fenda dupla.

(a) Mostre que a intensidade de luz relativa ao padrão de interferência sobre o anteparo (experimento de Young) é:

$$I = I_0 (\cos^2 \gamma) \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{2} k h \sin \theta \quad \text{e} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

(b) Determine a distribuição total de intensidade de luz sobre o anteparo e o período de franjas claras.

4 – [3,00] Considere a difração e a interferência causada pela incidência de uma luz monocromática em uma rede de difração.

(a) Mostre que a distribuição de intensidade de luz sobre o anteparo é:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2.$$

(b) Mostre que esta equação também é válida para fenda única e fenda dupla;

(c) Esboce o gráfico da distribuição da intensidade de luz devida a interferência para $N = 2$; $N = 4$; $N = 8$ e para N muito grande. Esboce também a distribuição angular para $N = 4$. E por fim, esboce a distribuição total da intensidade de luz para de $N = 5$ fendas em função de γ para $h = 3b$ e dê a largura dos máximos principais.

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE RESTRIITA foi formulado PRIMEIRO por GALILEU e MANTÉM-SE AINDA hoje como UMA DAS LEIS FUNDAMENTAIS DA FÍSICA. UM DOS SEUS ENUNCIADOS MAIS FREQUENTE é o SEGUINTE:

"AS LEIS DA FÍSICA TÊM A MESMA FORMA EM TODOS OS REFERENCIAIS INERCIAIS"

VEJAMOS O QUE ESTA FRASE QUER DIZER. UM DADO OBSERVADOR EM UM REFERENCIAL INERCIAL, ESTUDA O MOVIMENTO DE UM CORPO SOB A AÇÃO DE UMA DADA FORÇA. DEPOIS DE MEDIR O VALOR DA FORÇA $\vec{F}$, DA MASSA DO CORPO m e DE SUA VARIAÇÃO DE VELOCIDADE $\vec{a}$, CONSTATA QUE:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (01)$$

DE ACORDO COM O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE, QUALQUER OUTRO OBSERVADOR QUE SE MOVA COM VELOCIDADE UNIFORME RELATIVAMENTE AO PRIMEIRO OBSERVADOR, VAI OBTER

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' \quad (02)$$

ONDE $\vec{F}'$, m' e $\vec{a}'$, SÃO OS VALORES MEDIDOS PELO SEGUNDO OBSERVADOR.

É IMPORTANTE NOTAR QUE O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE NÃO OBRIGA QUE $\vec{F}' = \vec{F}$; $m' = m$ e $\vec{a}' = \vec{a}$, MESMO QUE ESTA SEJA UMA FORMA TRIVIAL DE SATISFAZÊ-LA. PORÉM, A RELAÇÃO ENTRE AS GRANDEZAS DEVE SER A MESMA.

Um enunciado equivalente do princípio da relatividade consiste na afirmação que todos referenciais inerciais são equivalentes. A escolha de um referencial inercial é, então, totalmente arbitrária e, portanto, interessa conhecer as regras para a comparação de medições feitas por diferentes observadores. Como é evidente, a base destas regras é a transformação de coordenadas.

A Transformação de Galileu.

Considere dois sistemas de coordenadas cartesianas S e S' , em movimento relativo uniforme. Com o objetivo de diminuir as complicações geométricas, escolha a orientação dos dois sistemas de coordenadas conforme a figura 1.

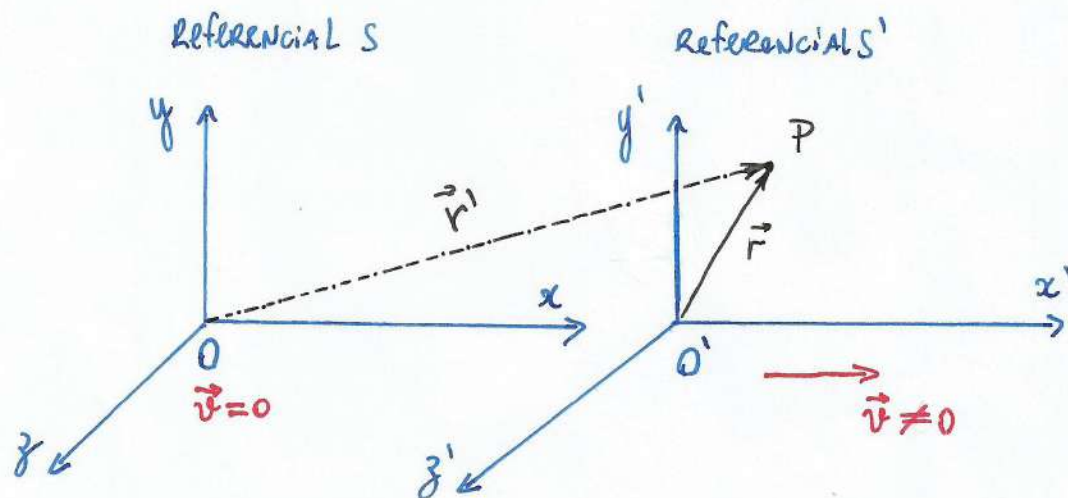


FIGURA 1 - Dois referenciais inerciais S e S' .

Na figura 1, dois referenciais inerciais S e S' em movimento relativo, com os eixos das coordenadas x (e x') escolhidos segundo a direção do movimento e os restantes escolhidos de maneira que os eixos homônimos, fiquem paralelos.

Os eixos de ambos os sistemas, portanto, têm a mesma direção e mesmo sentido, e são paralelos ao movimento. Suponha ainda, que a origem dos tempos, seja num instante escolhido como $t=0$ em ambos os referenciais, de maneira que as duas origens O e O' se encontrem, e que um determinado acontecimento tem lugar num ponto P , num certo instante. As coordenadas desse acontecimento são, no referencial S , $(t, \vec{r})$. Ao passo que no referencial S' é $(t', \vec{r}')$.

Mas qual é a relação entre estas coordenadas?

Para os físicos anteriores a Einstein, parecia óbvio que o intervalo de tempo que decorria entre o instante em que as duas origens coincidem ($t=0$) e aquele em que o acontecimento ocorreu, deveria ter um mesmo valor, medido num ou noutro referencial. Assim, aceitavam implicitamente que: $t' = t$.

Mesmo que pareça natural, esta certeza de $t' = t$, não está alicerçada em nenhum princípio fundamental, sendo um postulado implícito, subjacente a toda física pré-relativística. Ao aceitar o tempo absoluto ($t' = t$), é claro que as relações entre as coordenadas espaciais do acontecimento, ficam as seguintes:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO'} = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (03)$$

Portanto,

$$\left. \begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\}$$

Transformação de Galileu (04)

Ao derivar estas expressões em relação a t , resulta na lei de transformação para velocidade $\vec{u}$ (e para a aceleração $\vec{a}$):

$$u' = u - v, \quad (05)$$

$$a' = a. \quad (06)$$

A relação (05) traduz o facto bem conhecido de que a velocidade de um corpo apresenta valores diferentes em referenciais diferentes. Mas nota-se que um corpo que desloca instantaneamente de um ponto para outro (ou seja, que apresente velocidade infinita) é igualmente rápido em todos os referenciais. Sendo assim, podemos dizer que uma velocidade infinita é invariante sob as transformações de Galileu.

A relação (06) afirma que o valor da aceleração de um corpo é o mesmo em todos os referenciais. Sendo assim, a lei fundamental da dinâmica ($\vec{F} = \dot{\vec{p}}$) é invariante sob as transformações de Galileu. Este é o enunciado do princípio da relatividade de Galileu.

Mas considere agora, uma carga eléctrica q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ relativamente a algum referencial inercial, numa região onde está definido um campo magnético $\vec{B}$. A força sentida por esta partícula é dada por:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (07)$$

A presença de $\vec{v}$ na expressão (07) faz com que a força magnética não seja invariante sob as transformações de Galileu, pois o valor da carga e da força (tal como pode ser calculado a partir da transformação de Galileu) tem valores diferentes.

O problema da não invariância da eletrodinâmica pode ser ilustrado a partir das equações de Maxwell, que incluem um parâmetro fundamental c , cujo valor é a velocidade da luz ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$). Como a velocidade dos corpos é um invariante de Galileu (isto é, não mantém seu valor numa transformação de coordenadas) e, em particular, a velocidade da luz também não o é, resulta que a forma das equações de Maxwell não pode ser a mesma em todos os referenciais inerciais.

Em resumo, temos a seguinte situação: o princípio da relatividade de Galileu é satisfeito pelas leis da mecânica clássica, mas não pelas leis do eletromagnetismo.

Ao aceitar os seguintes postulados:

1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
2. A velocidade da luz tem o mesmo valor $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, em todos os referenciais inerciais, independente da velocidade da fonte.

(temos agora uma velocidade finita c , experimento de Michelson-Morley).

Vemos que, o postulado 2. traduz a opção de considerar a eletrodinâmica de Maxwell como uma teoria correta.

Então, Einstein propôs modificações nas transformações de Galileu ao introduzir uma nova visão sobre simultaneidade, que trouxe consequências inesperadas como a dilatação temporal e a contração espacial do comprimento, efeitos dependentes da correção relativística do fator de Lorentz.

SIMULTANEIDADE.

Antes de Einstein, supunha-se possível a transformação de informação a velocidades infinitas. Sendo assim, a questão de simultaneidade de dois acontecimentos afastados era encarada trivialmente, como descrito a seguir: Sejam A e B dois acontecimentos que ocorrem em locais afastados um do outro.

No momento em que cada evento aconteceu, podemos imaginar que foi emitido um sinal com velocidade infinita, em todas as direções. Assim, todos os observadores no universo, em todos os sistemas de coordenadas (inerciais ou não), foram, instantaneamente, informados da ocorrência de cada um dos acontecimentos.

Esta é a base da hipótese do tempo absoluto. Entretanto, toda teoria científica deve ser verificada experimentalmente, e não se verifica uma transmissão de informação com velocidade infinita (transmissão instantânea).

Foi necessário adotar um critério objetivo de simultaneidade de acontecimentos afastados um do outro.

O critério adotado é o seguinte: Se um evento 1 ocorre em P_1 no instante t , sendo marcado pela emissão de um sinal luminoso que parte de P_1 nesse instante t , e o mesmo vale para P_2 em t' (evento 2), dizemos que eles são simultâneos ($t = t'$) quando o ponto de encontro dos dois sinais luminosos for o ponto médio do segmento $\overline{P_1 P_2}$.

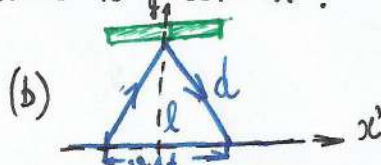
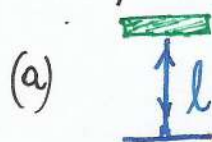
Em outras palavras, podemos dizer que dois observadores em movimentos relativos não concordam com a simultaneidade de dois eventos, portanto, a simultaneidade depende do estado do observador. A noção de tempo absoluto não resiste aos postulados, já que a noção de simultaneidade foi alterada.

Imagine uma observadora (MARIA) em Θ' , que coloca um espelho no teto da sua carruagem, como ilustra a figura 2.



FIGURA 2 - MONTAGEM EXPERIMENTAL PARA DEMONSTRAÇÃO DA RELATIVIDADE DA DURAÇÃO DOS INTERVALOS DE TEMPO.

Em seguida, envia um raio de luz do chão em direção ao espelho, perpendicularmente ao movimento da carruagem. A figura 3 representa a situação para calcular o tempo necessário para que a luz faça a viagem de ida e volta, após a reflexão no espelho.



$$\frac{d}{\left(\frac{v \Delta t}{2}\right)}$$

FIGURA 3 - TRAJECTO DO RAIOS DE LUZ, VISTA POR: (a) MARIA em Θ' e (b) JOÃO em O.

PARA MARIA QUE ESTÁ NO REFERENCIAL O' , A DISTÂNCIA TOTAL PERCORRIDA PELO RAIO DE LUZ É IGUAL A $2l$, E PORTANTO, O TEMPO GASTO NA VIAGEM É DADO POR:

$$\Delta t' = \frac{2l}{c} \quad (\text{PARA MARIA}). \quad (08)$$

PARA JOÃO (QUE ESTÁ NO REFERENCIAL O), A SITUAÇÃO É DIFERENTE. PARA ELE A EMISSÃO E RECEPÇÃO DO RAIO LUMINOSO TÊM LUGAR EM PONTOS DIFERENTES, DISTÂNCIADOS DE $(v\Delta t)$ UM DO OUTRO, ONDE Δt É O TEMPO DE DURAÇÃO DA VIAGEM DO RAIO LUMINOSO (MEDIDO NO RELÓGIO DE JOÃO):

$$\Delta t = \frac{2d}{c} \quad (\text{PARA JOÃO}). \quad (09)$$

A DISTÂNCIA PERCORRIDA AGORA É:

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + l^2}. \quad (10)$$

ENTÃO, O TEMPO GASTO PARA PERCORRER A DISTÂNCIA d É:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + l^2}. \quad (11)$$

OU SEJA,

$$\left(\frac{c}{2}\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\Delta t'\right)^2 \quad \text{DA EQ. (09)}$$

$$\Delta t^2 (c^2 - v^2) = c^2 \Delta t'^2, \quad \text{PORTANTO, TEMOS A}$$

DILATAÇÃO TEMPORAL:

$$\Delta t = \left(\frac{c}{c^2 - v^2}\right)^{1/2} \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12)$$

A RELATIVIDADE DO COMPRIMENTO É UMA CONSEQUÊNCIA DIRETA DA RELATIVIDADE DO TEMPO. SUPONHAMOS QUE JOÃO E MARIA QUEIRAM MEDIR O COMPRIMENTO DA CARRUAGEM.

MARIA mede L , que é um comprimento próprio pois a CARRUAGEM está em repouso em relação a ela. Além disso, MARIA observa que uma MARCA fixa no trem percorre este comprimento L num tempo

$$\Delta t = \frac{L}{v} \implies v = L/\Delta t \quad (13)$$

JÁ PARA JOÃO, A CARRUAGEM está em movimento. Ele vê a CARRUAGEM se APROXIMAR e depois se AFASTAR, e mede $\Delta t'$ (tempo próprio). PARA ele o comprimento DA CARRUAGEM é

$$L' = v \Delta t' \quad (14)$$

Ao substituir o valor de v NA EQUAÇÃO (14) e USAR A RELAÇÃO entre os tempos nos diferentes referenciais (equação 12), Obtemos:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{L}{\Delta t} \cdot \Delta t' = L \frac{\Delta t'}{\Delta t} \sqrt{1 - (v/c)^2} \\ \implies \boxed{L' = L \sqrt{1 - (v/c)^2}} &\quad (\text{CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO}) \quad (15) \end{aligned}$$

A este efeito dá-se o nome de CONTRAÇÃO DE LORENTZ-FITZGERALD. É possível identificar um fator NAS EQUAÇÕES (12) e (15), chamado de fator de LORENTZ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (16)$$

Com isso, podemos REESCREVER AS EQUAÇÕES (12) e (15) de forma MAIS COMPACTA:

$$\Delta t' = \Delta t \gamma \quad \text{e} \quad L' = L/\gamma$$

COMO PODEMOS OBTER AS EQUAÇÕES QUE SÃO UTILIZADAS NA TEORIA DA RELATIVIDADE PARA TRANSFORMAR VARIÁVEIS ESPACIAIS E TEMPORAIS DE UM SISTEMA PARA OUTRO QUE SE MOVE EM VELOCIDADE CONSTANTE EM RELAÇÃO AO PRIMEIRO?

CONSIDERE NOVAMENTE A SITUAÇÃO REPRESENTADA NA FIGURA 1. NUM CERTO INSTANTE, AS DUAS ORIGENS O e O' COINCIDEM e, NESSE INSTANTE, UMA LÂMPADA SITUADA NA ORIGEM DO REFERENCIAL S EMITE UMA LUZ EM TODAS AS DIREÇÕES. AS FRENTES DE ONDA NOS DOIS REFERENCIAIS SÃO, RESPECTIVAMENTE

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad (17)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (18)$$

SENDO O ESPAÇO CONSIDERADO HOMOGÊNEO (ISTO É, TODOS OS PONTOS DO ESPAÇO SÃO EQUIVALENTES), A TRANSFORMAÇÃO EM QUESTÃO DEVE SER LINEAR, DO TIPO

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma (x + vt) \\ x &= (x - vt)\gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

NOTE QUE, SE $v/c \rightarrow 0$ e $\gamma = 1$, TEMOS AS TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU. APÓS ALGUMAS SUBSTITUIÇÕES ENCONTRAMOS O VALOR DE $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$.

ASSIM, PODEMOS ESCREVER AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(x - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (x - vt) \\ y' &= y \text{ e } z' = z \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

AGORA SE $c \rightarrow \infty$, VOLTAMOS AS TRANSF. DE GALILEU! 10

Ao tomar as diferenciais da transformação de Lorentz, obtemos as velocidades de cada coordenada:

$$(21) \quad \begin{cases} dx' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (dx - v dt) \\ dy' = dy \text{ e } dz' = dz \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sendo: } u_x &= \frac{dx}{dt} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Em que a velocidade da luz aparece como um limite intransponível. Podemos introduzir a correção relativística (fator de Lorentz) para uma massa em movimento uniforme em relação a um referencial inercial, de forma a obter um momento linear relativístico:

$$m' = \gamma m \Rightarrow p' = \gamma m v'. \quad (23)$$

A partir do teorema trabalho-energia cinética, é possível mostrar que:

$$\boxed{E = m' c^2 \gamma = m c^2} \quad (24)$$

A teoria da relatividade impactou profundamente a ciência com os novos conceitos de simultaneidade e de tempo não absoluto.

Embora a teoria da relatividade restrita seja sempre creditada exclusivamente a Einstein, sabemos que a ciência nunca é uma criação individual.

Entre os diversos cientistas que participaram da construção desta teoria estão Fresnel, Michelson, Morley e especialmente Lorentz e Poincaré.

Referências Bibliográficas

- 1 - EISBERG, R.M., INTRODUÇÃO À FÍSICA MODERNA, 1992...
- 2 - EINSTEIN, LORENTZ, MINKOWSKI, O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE, 1978.
- 3 - GUERRA, A., BRAGA M., TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRIITA E GERAL NO PROGRAMA DE MECÂNICA DE ENSINO MÉDIO: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM, REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA, Vol. (29), Nº 4, 2007.

DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA.

EM TORNO DE 1674, NEWTON DESCREVEU O COMPORTAMENTO DA LUZ DE FORMA CORPUSCULAR, USANDO TRAÇADOS GEOMÉTRICOS.

HUYGENS PROPÔS UMA IDÉIA DIFERENTE DA DE NEWTON E APRESENTOU A ACADEMIA REAL DE CIÊNCIAS DA FRANÇA EM 1678. ENTRETANTO, A DESCRIÇÃO ONDULATÓRIA DA LUZ FOI PUBLICADA PRIMEIRO EM "TRAITÉ DE LA LUMIÈRE" (HUYGENS, 1690), ENQUANTO QUE A DESCRIÇÃO CORPUSCULAR DA LUZ FOI PUBLICADA EM "OPTICKS" (NEWTON, 1704).

COM A CHEGADA DA TEORIA DO ELETROMAGNETISMO DE MAXWELL E COM OS EXPERIMENTOS DE DIFRAÇÃO E FENDA DUPLA DE FRESNEL e YOUNG, A TEORIA DE HUYGENS DE QUE A LUZ É UMA ONDA, FOI CONSOLIDADA.

A FORMULAÇÃO ATUAL AFIRMA QUE A LUZ É CONSTITUÍDA DE FÓTONS. O FÓTON TEM MASSA DE REPOUSO NULA, MAS NÃO EXISTEM FÓTONS EM REPOUSO, ELES SÓ EXISTEM EM MOVIMENTO COM VELOCIDADE c . ENTRETANTO, A LUZ NÃO PODE SER ENTENDIDA SOMENTE POR SUA NATUREZA ONDULATÓRIA, ELA TAMBÉM TEM NATUREZA CORPUSCULAR.

O Limite da Óptica Geométrica ocorre para $\lambda \ll b$, isto é, para comprimentos de onda λ muito menores do que a dimensão de aberturas ou obstáculos b . Assim, no domínio da Óptica Geométrica, a luz se comporta como raios geométricos, similarmente ao caso de trajetórias das partículas clássicas.

Porém, quando $\lambda \approx b$, o ângulo de difração $\theta = \lambda/b$ torna-se importante, a natureza ondulatória da luz se evidencia e o fenômeno deve ser descrito pela Óptica Física, ou ondulatória.

Uma característica geral extremamente importante do movimento ondulatório, é o fato de que ondas confinadas numa região limitada no espaço só podem oscilar em frequências bem definidas, que formam um conjunto discreto. Exemplos simples, como a corda vibrante, mostram que as soluções da equação de onda são quantizadas, ou seja, são soluções definidas somente para um conjunto discreto de valores. Isso significa que os possíveis comprimentos de onda de uma corda de comprimento L , fixa em cada extremidade e

$$\lambda_n = 2L/n \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{HARMÔNICOS (01)}$$

Essa mesma ideia, de modos de vibração, mas para ondas eletromagnéticas em um forno, foi utilizada para desvendar um difícil quebra cabeça para os físicos do século XIX.

PLANCK (1900) construiu uma teoria para esse fenômeno com a conjectura de que os corpos absorveriam ou emitiriam energia em pacotes descontínuos (os quanta), e introduziu uma constante $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

$$E = h \cdot f \quad (02)$$

Além disso, segundo Einstein e Compton

$$\vec{p} = h \lambda \quad (03)$$

em que $\lambda = c/f$ é o comprimento de onda do fóton. Repare que as grandezas f e λ remetem a um comportamento ondulatório.

Para de Broglie, esta dualidade da radiação também deveria ocorrer na matéria, assim, a ~~segunda~~ equação (03), escrita na forma

$$\lambda = h/\vec{p} \quad (04)$$

é conhecida como equação de ^{Dr} Broglie e prevê um comprimento de onda de de Broglie para uma partícula em movimento com momento linear $\vec{p}$.

Exemplos:

(a) Determine o comprimento de onda de de Broglie PARA UM elétron de ENERGIA CINÉTICA $E_c = 100 \text{ eV} = 160 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Como $E_c = \frac{p^2}{2m}$ e PARA o elétron $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$, temos

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 1,2 \text{ \AA}$$

(b) Determine o comprimento de onda de de Broglie de UMA bola de boliche de MASSA $m = 1,0 \text{ Kg}$, LANÇADA COM UMA VELOCIDADE de $u = 10 \text{ m/s}$.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} = 6,6 \times 10^{-25} \text{ \AA}$$

É possível notar nos exemplos (a) e (b), que é muito mais difícil detectar o comportamento ONDULATÓRIO do movimento da bola de boliche em relação ao movimento do elétron.

Sabe-se que NO CASO DA LUZ, PARA OBSERVAR A NATUREZA ONDULATÓRIA DA MATÉRIA É NECESSÁRIO ABERTURAS OU OBSTÁCULOS CONVENIENTEMENTE PEQUENOS. NA ÉPOCA de de Broglie, OS SISTEMAS MAIS APROPRIADOS PARA ESTE fim ERAM OS ESPAÇAMENTOS ENTRE PLANOS ADJACENTES de UM CRISTAL, ONDE $b \approx 1 \text{ \AA}$.

Ao considerar o comprimento de onda de de Broglie do exemplo (b), vemos que não se pode esperar a detecção de qualquer evidência de movimento ondulatório na bola de boliche, onde $\theta = \lambda/b \approx 10^{-25} \text{ }^\circ$ para $b \approx 1 \text{ }^\circ$.

Entretanto, aspectos ondulatórios do movimento do elétron com $\lambda = 1,2 \text{ }^\circ$ seriam bem evidentes para $b \approx 1 \text{ }^\circ$.

No experimento de Davisson e Germer (1927), um feixe de elétrons de baixa energia é produzido num filamento aquecido e acelerado por uma diferença de potencial V .

O feixe eletrônico incide normalmente sobre a superfície de um cristal de níquel. Um detector é colocado a um ângulo θ em relação ao feixe incidente para medir a intensidade do feixe espalhado (figura 1).

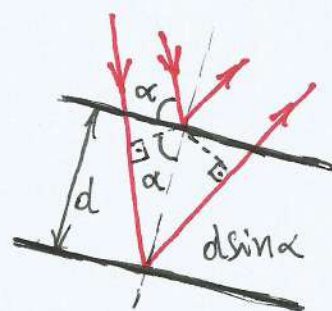
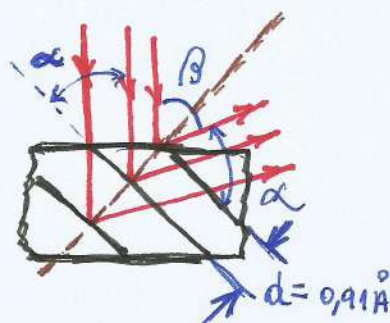
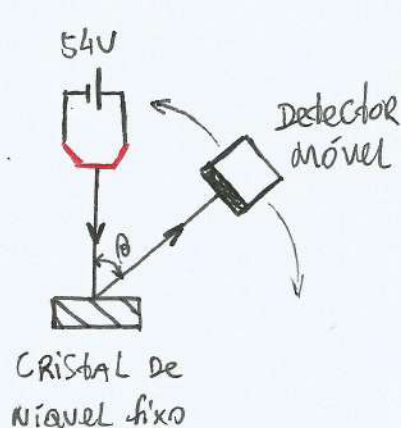


FIGURA 1 - Experimento de Davisson e Germer.

Na experiência, espera-se encontrar regiões de máximos e mínimos de intensidade, resultantes das interferências construtiva e destrutiva nos planos cristalinos do cristal de Níquel.

Exatamente como ocorre com o espalhamento de raios X nos cristais, para incidência normal, a condição de interferência construtiva, ou na linguagem cristalográfica "a condição de Bragg" fornece

$$2d \sin \alpha = \lambda \quad (05)$$

A experiência mostra que existe uma intensidade máxima para $\beta = 50^\circ$ ou $\alpha = 65^\circ$, quando $V = 54$ Volts. Ao usar os valores $d = 0,91 \text{ \AA}$ e $\alpha = 65^\circ$, obtidas da experiência, encontra-se o comprimento de onda do feixe espalhado como

$$\lambda = 2 \times 0,91 \times \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

Por outro lado, o comprimento de onda de De Broglie para elétrons de energia cinética $E_c = 54 \text{ eV} = 8,64 \times 10^{-18} \text{ J}$

será

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 1,665 \text{ \AA}$$

A CONCORDÂNCIA ENTRE OS RESULTADOS CONFIRMA QUANTITATIVAMENTE A hipótese DA ONDA DE MATÉRIA DE DE BROGLIE. AINDA EM 1927, G.P. THOMSON, filho de J.J. THOMSON, MOSTROU A DIFRAÇÃO DE FEIXES DE ELÉTRONS AO PASSAR ATRAVÉS DE PARTÍCULAS CRISTALINAS, CONFIRMANDO DE FORMA INDEPENDENTE, O POSTULADO DE DE BROGLIE.

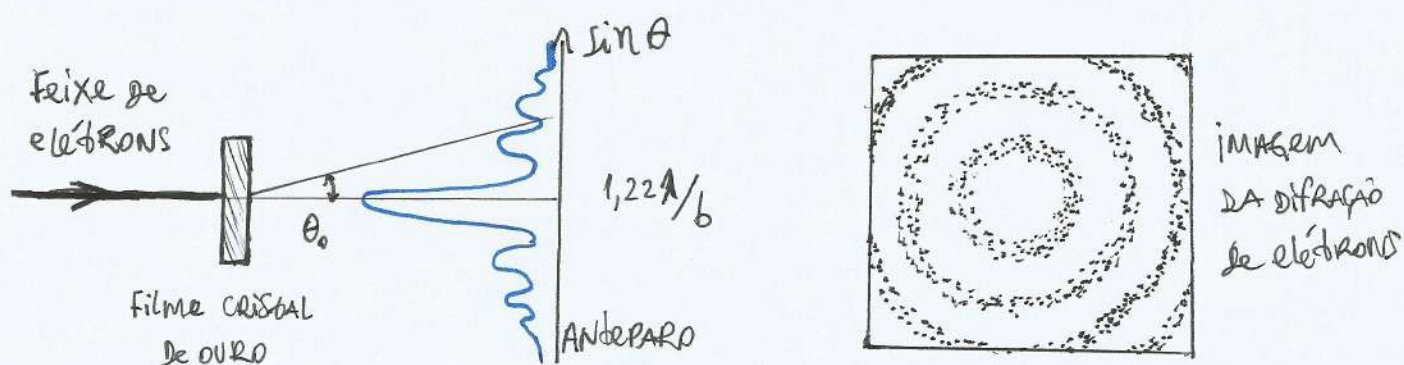


FIGURA 2 - Experimento de G.P. Thomson, difração de elétrons em películas de cristal de ouro.

E INTERESSANTE MENCIONAR QUE J.J. THOMSON RECEBEU O PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA EM 1906 PELA MEDIDA DA RAZÃO CARGA/MASSA DO ELÉTRON, ENQUANTO SEU FILHO, G.P. THOMSON, RECEBEU O PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA EM 1937, PELOS EXPERIMENTOS DE DIFRAÇÃO DE ELÉTRONS.

ASSIM, PODE-SE DIZER QUE THOMSON, O PAI, RECEBEU O PRÊMIO NOBEL POR TER MOSTRADO QUE O ELÉTRON É UMA PARTÍCULA E THOMSON, O FILHO, POR TER MOSTRADO QUE O ELÉTRON É UMA ONDA.

Sabe-se agora que a dualidade onda-partícula se aplica tanto a radiação quanto a matéria. Em alguns casos é necessário recorrer ao modelo corpuscular e em outros ao modelo ondulatório. Entretanto, é importante mencionar que os dois aspectos não se revelam simultaneamente em um mesmo experimento.

Quando a radiação, ou matéria, é detectada por interação, de modo que é localizada, ela se comporta como partícula.

Por outro lado, quando ela se move no espaço livre, deslocalizada, se comporta como uma onda e fenômenos de difração são observados.

Niels Bohr resumiu a questão em seu Princípio da Complementaridade: "O modelo corpuscular e ondulatório são complementares e não contraditórios". A experiência que comprova o caráter ondulatório da radiação é incapaz de comprovar o caráter corpuscular e vice-versa.

Para unificar o caráter ondulatório e corpuscular em um só experimento é necessário uma interpretação probabilística da dualidade onda-partícula.

NA TEORIA ONDULATÓRIA DA MATÉRIA, O MOVIMENTO DA PARTÍCULA é descrito por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ que deve ser solução de uma função de onda apropriada (Equação de Schrödinger).

DE ACORDO COM A PROPOSTA DE MAX BORN, DEVIDO AO COMPORTAMENTO ONDULATÓRIO DA MATÉRIA, A LOCALIZAÇÃO DE UMA PARTÍCULA DEVE DEPENDER DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE $|\Psi|^2$.

PARA DESCREVER A CORRELAÇÃO ENTRE O MOVIMENTO DE UMA ONDA CLÁSSICA E O MOVIMENTO DA PARTÍCULA, é suficiente AVALIAR A PROPRIEDADE DE SUPERPOSIÇÃO DE DUAS OU MAIS ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS CUJOS NÚMERO DE ONDA $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ e frequências $\omega = 2\pi f$, diferem por pequenas quantidades ΔK e $\Delta \omega$ respectivamente.

POR EXEMPLO, NO CASO DE DUAS ONDAS $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ DE MESMA AMPLITUDE A , TEMOS

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) \quad (06)$$

SENDO
$$\begin{cases} \Psi_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2(x, t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \end{cases}$$

VAMOS obter o comportamento da figura 3, conhecido como batimento.

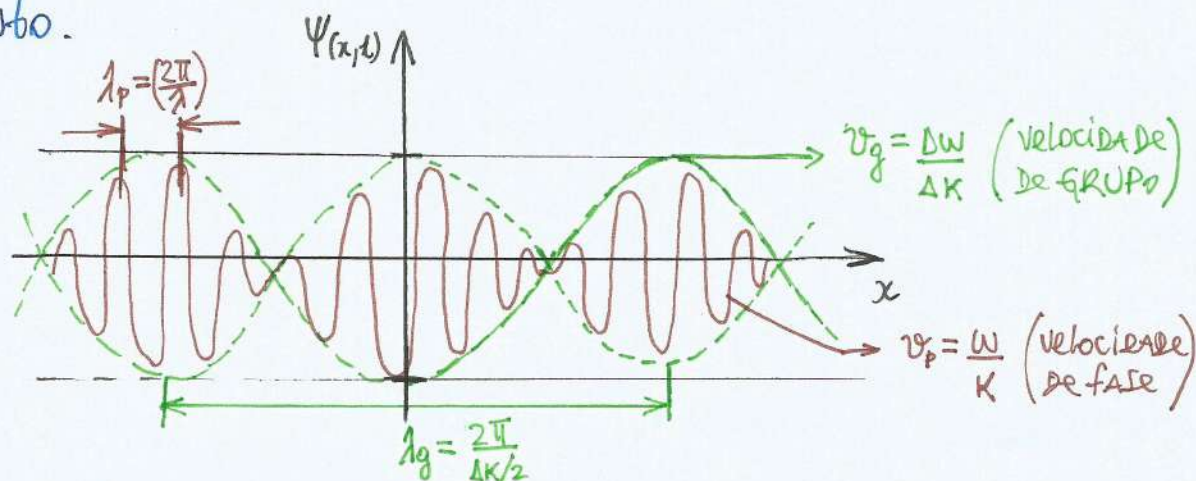


FIGURA 3 - SUPERPOSIÇÃO DE DUAS ONDAS SENOIDAIS DESLOCADAS LIGERAMENTE EM k E ω , PARA UM INSTANTE t FIXO.

ISSO SIGNIFICA QUE PARA INFINITAS ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS (integral de fourier), $\psi(x,t)$ tem a forma de um grupo ou pacote de ondas espacialmente localizado (figura 4).

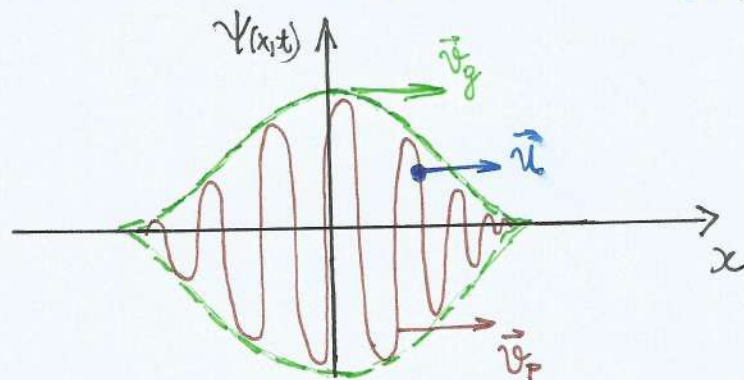


FIGURA 4 - Pacote de ondas apropriado para descrever a onda de matéria.

A ideia de pacote de ondas localizado parece ser razoável para descrever a onda de de Broglie da partícula em movimento.

3 - POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

As leis da física devem ser capazes de dizer como um sistema evolui.

Na mecânica clássica, ou no mundo macroscópico, a descrição de um sistema físico é resumida da seguinte maneira:

- O estado físico do sistema em um dado instante t_0 é descrito ao especificar as coordenadas generalizadas e seus momentos conjugados;
- Se o estado inicial do sistema é conhecido, podemos determinar com exatidão o estado posterior, após medida em t_0 ;
- A evolução do sistema é dada pela 2ª lei de Newton ($\vec{F} = \dot{\vec{p}}$) ou por formulações equivalentes (LAGRANGEANA/HAMILTONIANA).

A mecânica newtoniana é determinista, possibilita fazer previsões e na maioria das vezes é bastante intuitiva. A mecânica quântica foi criada para tratar de fenômenos do mundo atômico e sub atômico.

Nessa situação, de mundo microscópico, não há garantia de que nossa intuição sobre como as coisas funcionam em nosso mundo macroscópico, possa ser extrapolada para um mundo muito menor no qual não temos experiência sensorial direta.

Por isso, os pontos fundamentais da mecânica quântica, são expressos por postulados. Ou seja, afirmações ou fatos admitidos como verdadeiros sem necessidade de demonstração. A M.Q. tem confirmações *a posteriori*. 01

Postulado I - O estado de um sistema dinâmico é completamente especificado por uma função de estado (função de onda ou vetor de estado).

Mesmo sem uma definição clara do que é uma função de estado, este postulado simples já faz uma reivindicação específica: Existe uma função abstrata (função de estado) que contém as informações sobre o estado do sistema dinâmico.

Para que esta afirmação tenha significado, devemos obviamente fornecer uma interpretação física da função de estado e especificar suas propriedades matemáticas. Devemos também, dar uma receita de como a informação quantitativa deve ser extraída da função de estado, e comparar com resultados experimentais.

No formalismo da mecânica quântica, o estado de um sistema, num dado instante de tempo pode ser representado de duas formas principais:

1. O estado é representado por uma função complexa das posições ou dos momentos de cada partícula que compõe o sistema. Essa representação é chamada de função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ (de Schrödinger).

2 - Também é possível representar o estado por um vetor no espaço vetorial complexo (espaço de Hilbert). Esta representação do estado quântico é chamada vetor de estado. Nesta notação, introduzida por Dirac, tais vetores são usualmente chamados de kets $|\psi\rangle$ (de Heisenberg).

Em suma, tanto as funções de onda quanto os vetores de estado representam os estados de um sistema físico de forma completa e equivalente. As leis da mecânica quântica descrevem como vetores estado e funções de onda evoluem no tempo.

Estas ferramentas matemáticas (funções de onda e Kets) permitem o cálculo da probabilidade de se obter resultados específicos em um experimento físico. O formalismo da mecânica quântica permite, por exemplo, calcular a probabilidade de encontrar um elétron em uma região particular em torno do núcleo.

BORN postulou que, se é feita uma medida no instante t para localizar a partícula associada a função de onda ψ , então a distribuição de probabilidade de que uma partícula seja encontrada (dentro de uma caixa de lados L) entre x e $(x+dx)$ é dada por:

$$\int_{-L}^{+L} \psi^*_{(\vec{r},t)} \psi_{(\vec{r},t)} d\vec{r} \quad (01)$$

sendo ψ^* o conjugado complexo da função de onda ψ , o produto $\psi^* \psi = |\psi|^2$ é sempre uma função real positiva. Sendo a condição de normalização $\int_{-L}^L |\psi|^2 dx = 1$. Também é possível obter o valor médio da posição da partícula no estado ψ , chamado de valor esperado:

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi^*_{(x)} \hat{x} \psi_{(x)} dx = \int_0^L x |\psi|^2 dx \quad (02)$$

Postulado 2 - Todas as propriedades físicas observáveis de um sistema dinâmico são representados por variáveis dinâmicas que são operadores lineares.

Para entender o que é um operador, veremos o que ele faz e quais suas propriedades matemáticas, assim como a interpretação física correspondente. Primeiro, sua conexão com resultados experimentais é a seguinte: Considere um operador $\hat{Q}$ correspondente à variável dinâmica Q do sistema.

De acordo com a mecânica quântica, saber que o sistema está no estado ψ não significa que a medição da propriedade Q produza necessariamente um determinado valor. Só nos informará que medidas repetidas da mesma propriedade Q de sistemas similares, todos no mesmo estado ψ , dará uma distribuição estatística de valores, com um valor médio igual a

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi d\vec{r} \quad (03)$$

Matematicamente, um operador só tem significado quando opera em uma função de estado. Em geral um operador muda uma função de estado para outra: $\hat{Q}\psi = \Phi$.

Vamos tentar deixar mais claro o significado real de um operador, ao encontrar operadores que representem cada propriedade física. Como corolários do postulado 2, existe um conjunto de regras sobre como obter o operador para cada propriedade dinâmica do sistema.

COROLÁRIO 1 - Toda variável dinâmica e, portanto, todos os operadores correspondentes que representam qualquer propriedade do sistema têm a mesma dependência funcional nas variáveis canônicas que representam a posição $\vec{r}$ e o momento linear $\vec{p}$, como na mecânica clássica.

COROLÁRIO 2 - Na representação de Schrödinger, os operadores que representam as coordenadas da posição são variáveis físicas ordinárias $\vec{r}$ (ou x, y, z), mas os operadores que representam as componentes cartesianas do momento linear, são operadores diferenciais, ou seja

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$\text{ou} \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla \quad (04)$$

Dois consequências importantes seguem desta consideração:

1. A noção das relações de comutação (e o princípio da incerteza);
2. O conceito de autofunções e autovalores.

Uma questão interessante de ser abordada é a seguinte:

Como é possível obter conhecimento completo de duas propriedades A e B, simultaneamente?

Fisicamente, para que duas propriedades sejam especificadas simultaneamente, deve ser possível medir uma das suas propriedades sem influenciar o resultado da outra propriedade medida, e vice-versa.

A ORDEM DAS MEDIDAS DAS DUAS PROPRIEDADES NÃO DEVE IMPORTAR, INDEPENDENTEMENTE DO ESTADO EM QUE O SISTEMA SE ENCONTRA.

Isso significa que a aplicação do operador $\hat{A}\hat{B}$ em qualquer estado arbitrário ψ , deve ser o mesmo que aplicar o operador $\hat{B}\hat{A}$, ou seja:

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi \quad (05)$$

Por sua vez, significa que o efeito do operador $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ em qualquer estado arbitrário do sistema deve ser igual a zero, neste caso:

$$[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]\psi = 0 \quad (06)$$

O operador $[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]$, portanto, será um operador nulo; quando aplicado a qualquer estado arbitrário do sistema, se as duas propriedades podem ser especificadas de forma precisa simultaneamente.

A diferença de dois operadores, aplicados em ordem diferente, é chamado de comutador. O comutador dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é definido como

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (07)$$

Quando o comutador de dois operadores é igual a zero, dizemos que as duas grandezas físicas comutam. Isso significa que podemos medir duas grandezas físicas simultaneamente. Em geral, o comutador de dois operadores não é igual a zero, mas sim um terceiro operador $\hat{C}$:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C} \quad (08)$$

e pode ser avaliado matematicamente com base no Postulado 2 e seus corolários. Por exemplo, tome $\hat{A} = \hat{x}$ e $\hat{B} = \hat{p}_x$. Da representação de Schrödinger de $\hat{x}$ e $\hat{p}_x$, segue que:

$$(\hat{p}_x \hat{x})\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi(x)) = -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\hbar \psi$$

$$(\hat{p}_x \hat{x})\psi = (x \hat{p}_x)\psi - i\hbar \psi, \quad \text{portanto}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (09)$$

Da mesma maneira, pode-se obter as relações cíclicas de comutação entre todos os componentes da posição e vetores de momento. Para qualquer estado arbitrário ψ do sistema, o produto das incertezas em qualquer dois operadores é sempre igual ou maior que a metade da magnitude do valor esperado do comutador (Desigualdade de Schwartz):

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (10)$$

(Princípio da Incerteza de Heisenberg).

Vimos que, com bases do Postulado 2 (em qualquer uma das suas formas) é possível determinar quais propriedades físicas podem ser medidas simultaneamente com precisão. Os valores permitidos de qualquer propriedade estão limitados aos autovalores do operador que representam a propriedade (que pode ser quantizada ou não):

$$\hat{Q} \psi_{q_i} = q_i \psi_{q_i} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (11)$$

↳ Autofunção do operador $\hat{Q}_i$
↳ Autovalor do operador $\hat{Q}$.

Postulado 3 - Todas as funções de estado satisfazem a equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (12)$$

em que $\hat{H}$ é o Hamiltoniano do sistema, o operador correspondente à energia total do sistema.

O Hamiltoniano H em geral é uma função do tempo $H(\vec{r}, t)$. No caso quando H não é uma função do tempo (sistemas conservativos) a eq. de Schrödinger dependente do tempo

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

fica:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (13)$$

A equação (12) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, e a solução geral tem forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_i C_i \psi_{E_i}(\vec{r}, t) \quad (14)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_i C_i \Phi_{E_i}(t) \psi_{E_i}(\vec{r}) \quad (15)$$

$\psi_{E_i}(\vec{r})$ é uma autofunção do Hamiltoniano, ou a solução da equação de Schrödinger independente do tempo

$$\hat{H}(\vec{r}) \psi_{E_i}(\vec{r}) = E_i \psi_{E_i}(\vec{r}), \quad (16)$$

e $\Phi_{E_i}(t)$ satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_{E_i}}{\partial t} = E_i \Phi_{E_i}(t) \quad (17)$$

3 – Postulados da Mecânica Quântica e Aplicações

Aplicação 1 – OHS Quântico.

Considere um potencial do tipo OHS: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$

O Hamiltoniano fica: $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$.

Na MQ o Hamiltoniano atua como operador energia do sistema.

Sendo ψ a solução da equação de Schrödinger e uma autofunção de $\hat{H}$.

$$\hat{H}(\vec{r})\psi_{E_i}(\vec{r}) = E_i\psi_{E_i}(\vec{r})$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right)\psi_{E_i}(x) = E_i\psi_{E_i}(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{E_i}(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\psi_{E_i}(x) = E_i\psi_{E_i}(x)$$

Eq de Schrödinger, cujas soluções $\psi_{E_i}(x)$
correspondem aos autoestados de Energia E_i .

3 – Postulados da Mecânica Quântica e Aplicações

Aplicação 1 – OHS Quântico.

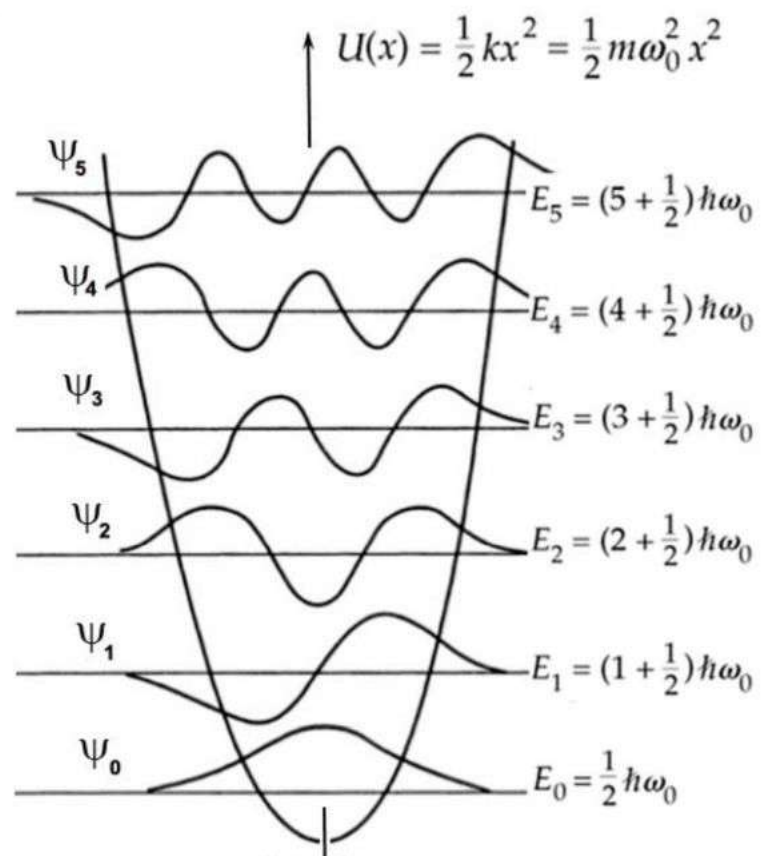
Autofunção de $\hat{H}$

$\psi_n =$

Autovalor de $\hat{H}$

$$E_i = (n + 1/2)\hbar\omega_0.$$

A Energia é quantizada!



NOTAÇÃO ALTERNATIVA (DIRAC/HEISENBERG)

A notação de Dirac é uma forma compacta e elegante de um sistema de notação que é amplamente utilizado na mecânica quântica. A notação de Dirac de uma função de estado arbitrária ψ é um vetor bra: $\langle \psi |$ ou um vetor ket: $|\psi\rangle$. A distinção das duas formas (bra ou ket) reside em como o vetor de estado é utilizado. O produto escalar entre duas funções de estado Φ e ψ , na representação de Schrödinger é:

$$\int \Phi_{(\vec{r})}^* \psi_{(\vec{r})} d\vec{r} = \langle \Phi | \psi \rangle \quad (18)$$

Na notação de Dirac é o bra-ket $\langle \Phi | \psi \rangle$, que é o produto escalar entre o vetor bra com o vetor ket, sendo que a informação sobre a coordenada é suprimida.

Suponha que a função de estado ψ seja gerada a partir de outra função de estado ψ' pelo operador $\hat{Q}$: $\hat{Q}\psi = \psi'$, na notação de Dirac, escrevemos

$$\int \Phi_{(\vec{r})}^* \hat{Q} \psi'_{(\vec{r})} d\vec{r} = \langle \Phi | \hat{Q} | \psi \rangle \quad (19)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo, por exemplo, na notação de Dirac, é:

$$\hat{H} |E_i\rangle = E_i |E_i\rangle, \quad (20)$$

E a condição de normalização, é realizada por um operador unitário

$$\sum_i |E_i\rangle \langle E_i| = \mathbb{1} \quad (21)$$

O ponto chave da notação de Dirac, é que a função de estado $|\psi\rangle$ pode ser representada como um vetor, por suas projeções sobre um conjunto completo de bases de estado, por exemplo, as autofunções da hamiltoniana $C_n = \langle E_n | \psi \rangle$, ou algum outro operador de escolha. Isso significa que o vetor ket $|\psi\rangle$ é dado por:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle E_1 | \psi \rangle \\ \langle E_2 | \psi \rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (22)$$

Na mesma representação, o operador $\hat{Q}$ sobre ψ , que gera uma nova função de estado ($\hat{Q}\psi = \Phi$), torna-se uma equação matricial, que pode ser obtida por uma multiplicação pela esquerda do vetor bra $\langle E_n |$:

$$\langle E_n | \hat{Q} | \psi \rangle = \langle E_n | \Phi \rangle \quad (23)$$

Ao introduzir o operador unitário (normalização) na equação (23) temos:

$$\begin{aligned} \langle E_n | \hat{Q} | \psi \rangle &= \langle E_n | \Phi \rangle \\ \sum_m \langle E_n | \hat{Q} | \psi \rangle \langle E_m | \psi \rangle &= \langle E_n | \Phi \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

que é a matriz:

$$\begin{pmatrix} \langle E_1 | \hat{Q} | E_1 \rangle & \langle E_1 | \hat{Q} | E_2 \rangle & \langle E_1 | \hat{Q} | E_3 \rangle \\ \langle E_2 | \hat{Q} | E_1 \rangle & \langle E_2 | \hat{Q} | E_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle E_1 | \psi \rangle \\ \langle E_2 | \psi \rangle \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_1 | \Phi \rangle \\ \langle E_2 | \Phi \rangle \\ \dots \end{pmatrix} \quad (25)$$

Assim, nesta representação, as funções de estado e operadores tornam-se colunas de vetores e matrizes quadradas, respectivamente.

De interesse particular é o operador $\hat{H}$, pois as bases de estado $|E_n\rangle$ são autoestados de $\hat{H}$ e sua representação é

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (26)$$

e os elementos da diagonal são os autovalores de $\hat{H}$. Na formulação matricial, portanto, "diagonalizar a matriz" (de acordo com as regras da álgebra linear), é equivalente a resolver a equação de Schrödinger independente do tempo.

Na representação em que $\hat{H}$ é diagonal, o produto escalar $\langle\Phi|\Psi\rangle$ é o produto de um vetor linha com um vetor coluna. Assim, na representação matricial, o vetor bra $\langle\Phi|$ é um vetor linha, enquanto o vetor ket $|\Psi\rangle$ é um vetor coluna.

É importante notar a importância da ordem da multiplicação dos vetores bra e ket. O produto de um vetor bra pela esquerda por um vetor ket pela direita resulta num escalar (ou num número). O produto de um vetor ket pela esquerda e um vetor bra pela direita, leva a uma matriz ou a um operador.

Referências Bibliográficas

- 1 - TANG, C.L., fundamentals of Quantum Mechanics for solid state electronics AND optics, 2005.
- 2 - Griffiths, D.J., Introduction to Quantum Mechanics, 2004.
- 3 - Sakurai, J.J., MODERN QUANTUM MECHANICS, 1995.
- 4 - Eisberg, R. e Resnick, R., FÍSICA QUÂNTICA: ÁTOMOS, MOLÉCULAS, SÓLIDOS, NÚCLEOS E PARTÍCULAS, 1988.
- 5 - Gasiorowicz, S., FÍSICA QUÂNTICA, 1979.