

Fenômenos de Transporte

FORMULÁRIO

- Segunda Lei de Newton (Momento Linear e Angular) e Energia total específica:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \quad \Sigma \vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}; \quad e = gy + \frac{V^2}{2} + u.$$

- Equação Básica da Formulação de Volume de Controle:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \iint_{S.C.} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \beta \rho dV.$$

- Vazão e Fluxo Convectivo:

$$Q = \iint_A (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\vec{A}; \quad \dot{m} = \iint_A \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\vec{A}.$$

- Teorema da Divergência:

$$\iint_S \vec{G} \cdot \hat{n} d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = 0.$$

- Equação da Continuidade na Forma Integral e na Forma Diferencial:

$$\iint_{S.C.} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho dV = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

- Equação da Continuidade em Coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

- Equação de Bernoulli (sem dissipação e com dissipação de Energia Mecânica):

$$gy_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = gy_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}; \quad y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p.$$

- Equação de Bernoulli Modificada para situações com Bombas e Turbinas:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_B = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p; \quad y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} - h_T = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_p.$$

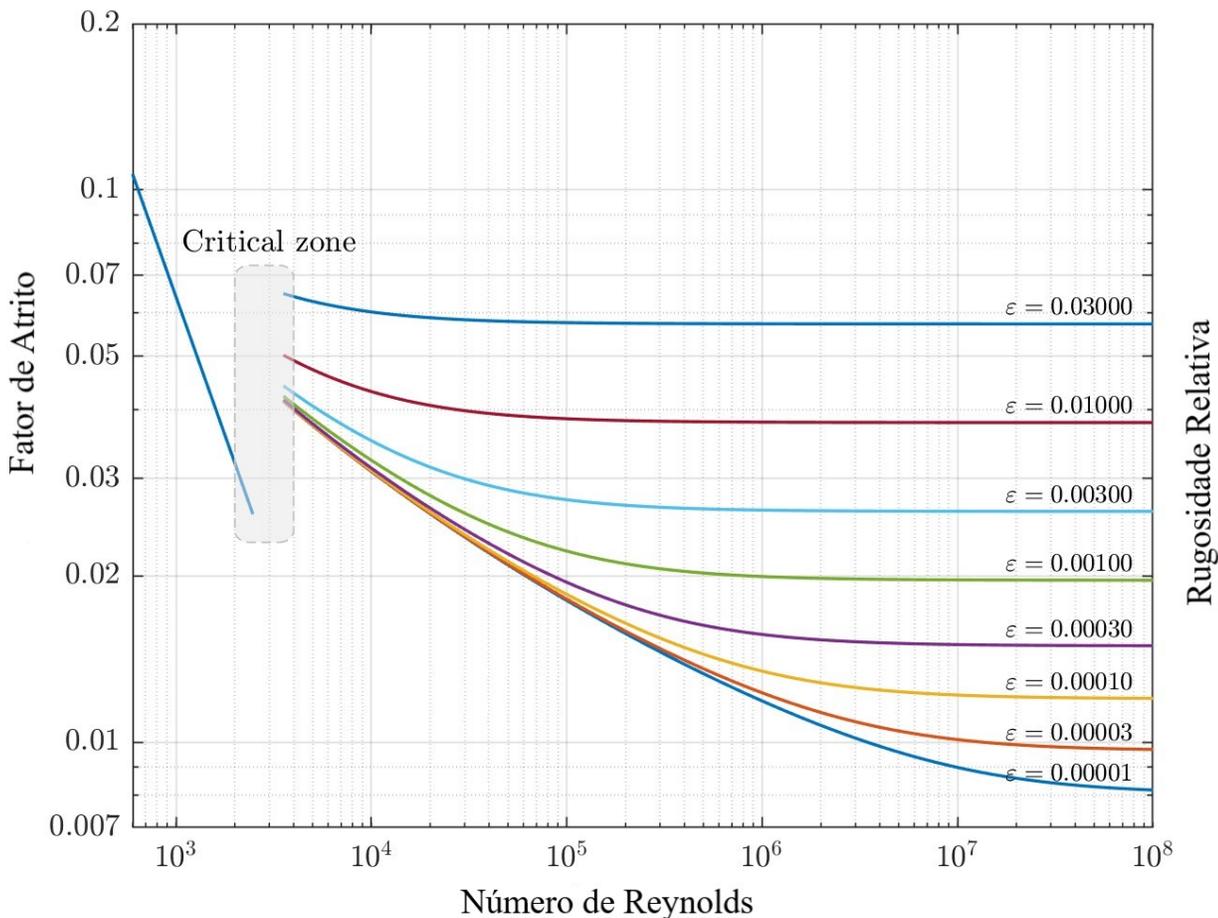
- Potência de Bombas e Turbinas:

$$\frac{\delta W_B}{dt} = \dot{m}gh_B = \rho g Q h_B; \quad \frac{\delta W_T}{dt} = \dot{m}gh_T = \rho g Q h_T.$$

- Equação de Darcy-Weisbach, Fator de Atrito do Duto e Número de Reynolds:

$$h_{p,d} = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g}; \quad f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right); \quad Re_x = \frac{\rho V_0 x}{\mu}.$$

- Diagrama de Moody para os fatores de atrito de escoamentos em dutos de seção circular:



- Equação de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V}.$$

- Componentes da Equação de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas:

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right];$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right];$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right].$$

- Operador derivada material:

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

- Tensor Tensão;

$$\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Tensão Normal; Tensão de Cisalhamento e Viscosidade Absoluta:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p; \quad \tau_{yx} = \mu \frac{d\theta}{dt} = -\mu \frac{\partial V_x}{\partial y}; \quad \mu = \rho \nu.$$

- Lei de Fourier; Equação de Difusão de Calor e Difusividade Térmica:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}.$$

- Equação diferencial de transporte de calor (escoamento incompressível):

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T - k \nabla^2 T = 0.$$



UFSM
Frederico Westphalen

2ª Lista de Exercícios de Fenômenos de Transporte
Transferência de Fluxo Calor
Resumo

Prof. Nilson E. Souza Filho

Problema 1. Problema 2. Problema 3. Problema 4.

Problemas do Cap.2. Neste capítulo, conceituamos e apresentamos uma formulação básica para Fenômenos de Transporte. Foi conceituado e analisado, a partir de uma abordagem fenomenológica, processos unidimensionais em que ocorrem fluxos de momento linear (escoamento laminar de um fluido), *de energia (condução de calor)* e de massa (difusão molecular), apresentamos um modelo comum e mostrando a analogia existente entre esses três fenômenos unidimensionais de transferência difusiva.

Problema 1 → Enviei;

Problema 2 → Pág.18;

Problema 3 → Prob. 2.8 e 2.10 (Enviei);

Problema 4 → Pág. 121.

ENTREGAR na aula dia 18/11/2023. VALOR: 1,00

Problema 5. Problema 6. Problema 7. Problema 8. Problema 9. Problema 10.

Capítulo 7 e Capítulo 8.

Cap.7: Calor pode ser definido como a energia que é transferida em função de uma diferença de temperatura. A termodinâmica estuda as relações entre as propriedades de um sistema e as trocas de calor e trabalho com a vizinhança, fornecendo informações sobre a quantidade de energia (calor) envolvida para o sistema passar de um estado inicial a um estado final num dado processo termodinâmico. A transferência de calor é a área da ciência que estuda os mecanismos de transporte de calor e a determinação das distribuições de temperatura e dos fluxos (taxas de transferência) de calor. Existem três mecanismos de transferência de calor: condução, convecção e radiação. Neste capítulo, vamos caracterizá-los e apresentar as equações que fornecem as densidades de fluxo de calor para esses três modos de transferência. Define-se fluxo de calor (taxa de transferência de calor) como a quantidade de calor que é transferida através de uma superfície por unidade de tempo, e densidade de fluxo de calor como a quantidade de calor que é transferida por unidade de tempo e por unidade de área, ou seja, a densidade de fluxo de calor é taxa de transferência de calor por unidade de área.

Cap.8: Neste capítulo, estudaremos a determinação do fluxo de calor (taxa de transferência de calor) e da distribuição de temperatura para situações de condução unidimensional e em regime permanente, em sistemas com geometria simples onde são conhecidas as temperaturas no contorno e o meio possui condutividade térmica constante, sem geração interna de calor. Apresentaremos duas abordagens para a resolução desses problemas: numa, por meio da integração da equação de Fourier para a condução, determina-se o fluxo de calor e posteriormente a distribuição de temperatura; na outra abordagem determina-se a distribuição de temperatura por intermédio da equação da difusão de calor e, com o conhecimento do perfil de temperatura no meio, obtém-se o fluxo de calor com o uso da equação de Fourier para a condução. Também estudaremos problemas unidimensionais de condução de calor, em regime permanente, em paredes com postas com convecção no contorno, e definiremos resistência térmica, que é um conceito útil na análise de problemas de transferência de calor em regime permanente sem geração interna de calor.

Problema 11. Problema 12. Problema 13. Problema 14. Problema 15.

Existem muitas situações físicas nas quais as condições térmicas variam com o tempo, resultando em distribuições não permanentes de temperatura. Neste capítulo, deduziremos a equação diferencial da condução de calor cuja solução, submetida às condições de contorno e inicial do problema, fornece a distribuição de temperatura no sistema considerado. Com o conhecimento do campo de temperatura pode-se, com o uso da equação de Fourier para a condução, determinar a densidade de fluxo de calor em qualquer ponto da região de definição do problema para um determinado instante de tempo. O objetivo principal deste capítulo é estudar a formulação de problemas simples de condução de calor em regime não permanente. A formulação de um problema de transiente térmico consiste na especificação da equação diferencial e das condições de contorno e inicial que descrevem o problema em estudo. Existem vários métodos de resolução da equação diferencial da difusão de calor. No Cap.9, além de estudarmos a formulação de transientes térmicos, trataremos da resolução da equação da difusão de calor com a utilização do método de separação de variáveis para problemas unidimensionais simples.

Aula do dia 18/11/2024 Das 8h até às 10h → Cap.7 e Cap.8 (Vou resolver os Problemas 05 ao 09)

Das 10:15 até 12:15 → Cap.8 (Vou resolver os Problemas 11 ao 15)

ENTREGAR na aula do dia (dia da Prova, depois da JAI). 02/11/2023. VALOR: 2,00.



UFSM
Frederico Westphalen

2ª Lista de Exercícios de Fenômenos de Transporte Transferência de Fluxo Calor

Prof. Nilson E. Souza Filho

Problema 1. A partir do fluxo de calor que entra ou sai de um volume unitário de matéria e da *Lei de Fourier*, (a) determine a *Equação de Difusão de Calor*;
(b) Determine a *Equação de Difusão Térmica* com termo de fonte.

Problema 2. Considere o processo unidimensional de transferência difusiva de calor em uma placa. Na fase em regime permanente, têm-se as condições invariantes com o tempo, de forma que a superfície superior da placa tem temperatura T , constante, enquanto a superfície inferior da placa permanece com temperatura T_0 . Determine a distribuição de temperatura $T(y)$ em regime permanente.

Problema 3. Considere o processo unidimensional de transferência difusiva de calor em uma placa. Na fase em regime permanente, têm-se as condições invariantes com o tempo, de forma que a superfície superior da placa tem temperatura T , constante, enquanto a superfície inferior da placa permanece com temperatura T_0 . Utilize a *Equação de Difusão de Calor* para determinar:
(a) A distribuição de temperatura $T(y)$ em regime permanente;
(b) A distribuição de temperatura $T(y)$ para a situação em que a superfície inferior da placa é mantida com temperatura T_0 igual a zero.

Problema 4. Mostre que a equação diferencial de transporte de calor para um escoamento incompressível, onde não ocorre propagação de energia por atrito viscoso e não há fontes de geração de calor, com condutividade térmica e o calor específicos constantes, é dada por:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T - k \nabla^2 T = 0.$$

Problema 5. Considere uma parede plana, de espessura L e constituída de um material com condutividade térmica k constante. As superfícies da parede são mantidas às temperaturas T_0 e T_L , constantes, sendo $T_0 > T_L$. Determine o fluxo de calor e a distribuição de temperatura na direção x .

Problema 6. Considere um duto cilíndrico longo, de comprimento L , com raio interno r e raio externo r_e , construído de um material com condutividade térmica k constante. As superfícies interna e externa do duto são mantidas às temperaturas T_i e T_e , respectivamente, constantes, sendo $T_i > T_e$. Determine o fluxo de calor e a distribuição de temperatura para a condução unidimensional de calor, em regime permanente e sem geração interna, através de uma parede cilíndrica, na direção radial.

Problema 7. Considere uma parede plana composta constituída por uma camada de um material com condutividade térmica k_1 e espessura L_1 , e de outra camada de um material com condutividade térmica k_2 e espessura L_2 . Considere, também, um contato térmico perfeito entre essas duas camadas sólidas e que as condutividades térmicas e os coeficientes de transferência de calor por convecção são constantes. A superfície esquerda da parede composta está em contato com um fluido aquecido que mantém temperatura T_a constante com coeficiente de transferência de calor por convecção h_a , enquanto a superfície direita dessa parede está em contato com um fluido frio que mantém temperatura T_f constante com coeficiente de convecção h_f . Determine o fluxo de calor (taxa de transferência de calor).

Problema 8. Considere um duto cilíndrico composto, longo, de comprimento L , constituído por uma camada de um material com condutividade térmica k_1 , com raio interno r_i , e raio externo r_e , e outra camada de um material com condutividade térmica k_2 com raio interno r_2 raio externo r_3 . Considere, também, que a superfície interna do duto composto está em contato com um fluido aquecido que mantém temperatura T_a constante, com coeficiente de transferência de calor por convecção h_a , enquanto a superfície externa está em contato com um fluido frio que permanece à temperatura constante com coeficiente de transferência de calor por convecção h_f e que o contato térmico entre as camadas sólidas é perfeito. Determine o fluxo de calor em função da diferença total de temperatura.

Problema 9. Para as situações de transferência de calor, em regime permanente e sem geração interna de calor, pode-se, de uma forma análoga à condução de carga elétrica num condutor, associar resistências térmicas ao sistema. Mostre que as resistências térmicas para paredes compostas:

(a) Em série são $R_{T,conv} = \frac{1}{hA}$ e $R_{T,cond} = \frac{L}{kA}$, enquanto que,

(b) Em paralelo são $R_{T,conv} = \frac{1}{2\pi r_s L h}$ e $R_{T,cond} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L k}$;

(c) Determine o *Raio Crítico de Isolamento* r_{ec} , para o qual o fluxo de calor \dot{Q}_r é máximo.

Problema 10. A Figura mostra um esquema da parede plana de um refrigerador que consiste em uma folha externa de aço com espessura L_A e condutividade térmica k_A e de uma folha interna de plástico com espessura L_p e condutividade térmica k_p . Entre essas folhas há uma camada de lã de vidro com condutividade térmica k_v , conforme é mostrado no esquema da Figura. O refrigerador foi projetado para manter o ar interno com temperatura T , constante, enquanto o ar ambiente permanece com temperatura T_x constante. A área total da parede é A e o equipamento de refrigeração retira do interior um fluxo de calor Q . Os coeficientes de transferência de calor por convecção do ar interno e do ar ambiente externo são, respectivamente, h e h_x . Determine:

(a) a espessura L_v da camada de lã de vidro necessária para que a temperatura interna seja 7 ;

(b) a temperatura na junção plástico-lã de vidro; e

(c) a distribuição de temperatura na camada de lã de vidro.

Problema 11. Mostre que a *equação geral da condução de calor*:

(a) em coordenadas retangulares é dada por: $\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{g}(x, y, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$.

(b) Considere o caso particular em que a condutividade térmica é constante e sem fontes de geração interna de calor e determine a *equação de difusão de calor*.

(c) Escreva a equação de difusão de calor em coordenadas cilíndricas.

Problema 12. Faça uma figura com o esquema de uma parede plana, de grandes dimensões e espessura pequena L , constituída de um material com difusividade térmica α , condutividade térmica k e sem geração interna de calor. Inicialmente, a parede está em equilíbrio térmico com o ar ambiente, que possui temperatura T_∞ . No instante de tempo $t = 0$, a superfície esquerda da parede adquire subitamente temperatura T_0 constante ($T_0 > T_\infty$). Se o ar ambiente situado do lado direito da parede é um reservatório térmico que mantém temperatura T_∞ , constante com coeficiente de transferência de calor por convecção, h_∞ formule detalhadamente o problema de transiente térmico na parede.

Problema 13. Considere a parede plana composta de um forno, constituída de uma camada de cerâmica retrataria com espessura L_c , condutividade térmica k_c e difusividade térmica α_c e de uma camada de aço com espessura L_A , condutividade térmica k_A e difusividade térmica α_a , cuja situação está esquematizada na Figura 9.5. Inicialmente, o forno está em equilíbrio térmico com o ar externo. Ligando-se o aquecimento, a temperatura do ar interno varia com o tempo segundo a função $T_i(t)$, dada com coeficiente de transferência de calor por convecção, h_i enquanto o ar externo permanece com temperatura T_∞ , e coeficiente de transferência de calor por convecção h_∞ . Considerando contato térmico perfeito na junção das camadas sólidas e condução unidimensional de calor na direção x , formule detalhadamente o problema de transiente térmico na parede composta do forno.

Problema 14. Faça uma figura que mostra o esquema de um cilindro de grande comprimento e pequeno raio R , constituído de um material com difusividade térmica α , condutividade térmica k e sem geração interna de calor. Inicialmente, o cilindro possui temperatura uniforme T_i . No instante de tempo $t = 0$, esse cilindro é mergulhado num líquido que mantém temperatura T_∞ constante (reservatório térmico) com coeficiente de transferência de calor por convecção h . Considerando que $T_i > T_\infty$. Formule detalhadamente o problema de transiente térmico nesse corpo cilíndrico.

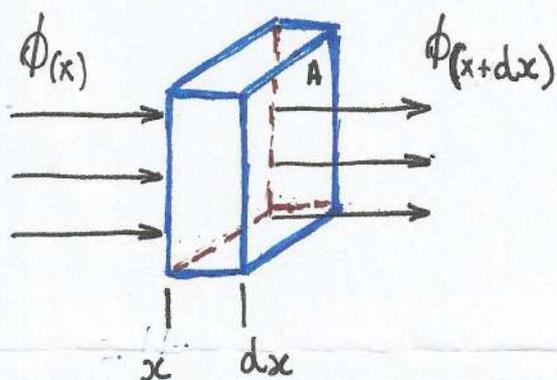
Problema 15. Faça uma figura que mostra um esquema de uma placa plana de comprimento infinito e espessura $2L$ (placa onde a espessura é muito menor que as outras dimensões), constituída de um material homogêneo com difusividade térmica α . Inicialmente, a placa possui temperatura uniforme T_f . Considerando que, no instante de tempo $t = 0$, as superfícies da placa são resenadas subitamente à temperatura T e mantidas com essa temperatura para $t > 0$, determine o transiente térmico $T(x, t)$.

SANTA MARIA 15/09/2017

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE CALOR

A CONDUÇÃO DE CALOR NUM MATERIAL É DADA PELO FLUXO DE CALOR QUE ENTRA OU SAI DE UM VOLUME UNITÁRIO DE MATÉRIA.

A VARIAÇÃO DE FLUXO DE CALOR NA SEÇÃO TRANSVERSAL A É :



$$d\phi(x) = [\phi(x) - \phi(x+dx)] \cdot A$$

$$d\phi(x) = \frac{1}{dx} [\phi(x) - \phi(x+dx)] dx \cdot A$$

$$-\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}$$

Logo $d\phi(x) = -\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} dV$. USANDO A LEI DE FOURIER

P/ CONDUÇÃO DE CALOR :

$$\phi(x) = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

PORTANTO

$$d\phi(x) = +K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV \quad (1)$$

O CALOR NO elemento de volume, SEGUNDO A TERMODINÂMICA, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = mc \Delta T \\ dQ = dm c dT \end{array} \right.$$

A VARIACÃO DE CALOR FORNECIDO NO tempo é IGUAL A VARIACÃO DE FLUXO DE CALOR DEPENDENTE DO tempo:

$$\frac{dQ}{dt} = d\phi_{(x)} \implies d\phi_{(x)} = c \left(\frac{dm}{dV} \right) dV \frac{dT}{dt}$$

Logo: $\boxed{d\phi_{(x)} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV} \quad (2)$

A eq. de DIFUSÃO DE CALOR é ENCONTRADA A PARTIR DA VARIACÃO DE FLUXO DE CALOR EM FUNÇÃO DE r e t (eq. 1 e 2).

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0} \quad (3)$$

Em que α é a difusividade térmica do material dada em m^2/s .

Se no meio condutor existe geração de calor, reescrevemos a equação 1 com um termo de fonte:

$$d\phi = \left(K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t) \right) dV,$$

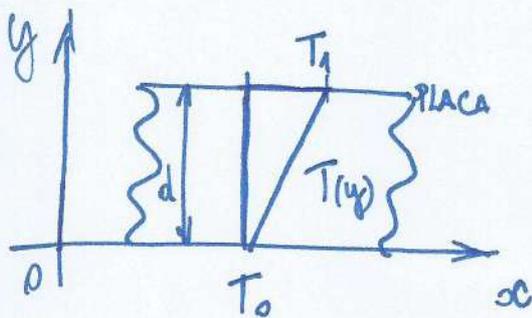
Assim, a equação de difusão térmica com termo de fonte fica:

$$\boxed{\nabla^2 T(\vec{r},t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{K} f(\vec{r},t)} \quad \text{(em 3D)} \\ \text{eq. 4.}$$

Em que:

- $T \rightarrow$ Distribuição de Temperatura (K)
- $\alpha \rightarrow$ Difusividade térmica (cm^2/s)
- $K \rightarrow$ Condutividade térmica do meio (W/mK)
- $f(r,t) \rightarrow$ Termo de fonte (W/m^3)
- $\mu \rightarrow$ Comprimento de difusão térmica (cm)
- $c \rightarrow$ Calor específico
- $\beta \rightarrow$ Coef. de absorção óptica (cm^{-1})

2.8) Considere o processo 1D de transferência difusiva de calor em uma placa. (fig. 2.2). Determine a distribuição de temperatura $T(y)$ em Regime Permanente (Use a eq. 2.8.14).



$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$t \gg \tau \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Sol. Geral é $T(y) = ay + b$

$$\text{C.C.} \begin{cases} \text{P/ } y=0 \Rightarrow T(0,t) = T_0 \\ \text{P/ } y=d \Rightarrow T(d,t) = T_1 \end{cases}$$

$$T(0) = T_0 = b$$

$$T(d) = T_1 = ad + T_0$$

$$a = \frac{T_1 - T_0}{d}$$

Logo a Sol. Geral fica

$$T(y) = \left(\frac{T_1 - T_0}{d} \right) y + T_0$$

(2.10) Considere o Problema 2.8. Determine a distribuição de temperatura $T(y)$ p/ a situação em que a superfície inferior da placa é mantida com temperatura $T_0 = 0$. Compare o resultado com as respostas dos problemas 2.7 e 2.9.

Temos, portanto, as seguintes condições de contorno

$$\text{c.u.} \begin{cases} \text{p/ } y = 0 \Rightarrow T_{(0,t)} = 0 \\ \text{p/ } y = d \Rightarrow T_{(d,t)} = T_1 \end{cases}$$

p/ a sol. geral:

$$T(y) = ay + b$$

$$T_{(y=0)} = b = 0$$

$$T_{(d)} = ad = T_1$$

$$a = \frac{T_1}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(y) = \left(\frac{T_1}{d}\right)y}$$

A sol. é análoga aos Prob. 2.7 e 2.9.

6.4. Eq. Diferencial de Transporte de Calor.

FW, 13/11/2023

Deduziremos a eq. diferencial de transporte de calor a partir de um balanço de Energia Térmica, para escoamento incompressível, no qual NÃO ocorre dissipação de Energia Mecânica por atrito viscoso e também NÃO há fontes de geração interna de calor.

A 1ª Lei da Termodinâmica na formulação de volume de controle é expressa pela eq. da Energia na forma integral, que pode ser escrita como:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{eixo}}}{dt} = \iint_{\text{S.C.}} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{V.C.}} \rho e dV \quad (6.4.1)$$

onde $e = gy + \frac{V^2}{2} + u$, sendo que a energia interna u é proporcional à temperatura, de forma que $u = c_v \cdot T$, c_v é o calor específico a vol. etc. (6.4.2)

Considerando as seguintes hipóteses:

- escoamento incompressível;
- NÃO há realização de trabalho de eixo;
- NÃO ocorre dissipação de energia mecânica por atrito viscoso;
- sem fontes de geração interna de calor.

A eq. DA ENERGIA fica reduzida A

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{S.C.} (e + \frac{p}{\rho}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} e \rho dV \quad (6.4.3)$$

A energia total específica e é composta de termos de energia mecânica e energia interna. Ao considerar somente o balanço de energia térmica, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = \boxed{\iint_{S.C.} c_v T \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{A}} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} c_v T \rho dV \quad (6.4.4)$$

Fluxo líquido de calor que entra por condução que cruza a superfície S.C.

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_{S.C.} (\vec{q} \cdot \vec{n}) d\vec{A}, \quad \text{Assim:} \quad (6.4.5)$$

$$- \iint_{S.C.} (\vec{q} \cdot \vec{n}) d\vec{A} = \iint_{S.C.} c_v T \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} c_v T \rho dV \quad (6.4.6)$$

Do teorema da divergência: $\iint_{S.C.} \vec{q} \cdot \vec{n} d\vec{A} = \iiint_{V.C.} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad (6.4.7)$

$$\Rightarrow \iiint_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t} (c_v T \rho) + \vec{\nabla} \cdot (c_v T \rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \right] dV = 0 \quad (6.4.8)$$

O vol. de controle é arbitrário, de forma que o integrando seja nulo, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_v T \rho) + \vec{\nabla} \cdot (c_v T \rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (6.4.9)$$

Tem-se que $\vec{\nabla} \cdot (\rho c_v T \vec{V}) = \rho c_v T \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (\rho c_v T \rho)$ (6.4.10)

Então a eq. (6.4.9) fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_v T \rho) + \rho c_v T \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (\rho c_v T \rho) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (6.4.11)$$

O escoamento é INCOMPRESSÍVEL, $\rho = \text{cte.}$, tal que a eq. da CONTINUIDADE fica $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$; se CONSIDERAR também $c_v = \text{cte.}$:

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (6.4.13)$$

sendo $\vec{q} = -K \vec{\nabla} T$ (lei de Fourier) (6.4.14)

obtemos: $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot (-K \vec{\nabla} T) = 0$ (6.4.15)

sendo a condutividade térmica K constante, fica:

$$\boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T - K \nabla^2 T = 0} \quad \begin{matrix} \text{fluxo de calor} \\ \text{por convecção} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(Eq. diferencial de} \\ \text{transporte de calor)} \end{matrix}$$

! UM escoamento INCOMPRESSÍVEL ! termo de fluxo de calor por condução.

Em que $\nabla^2 T \Rightarrow$ LAPLACIANO DA TEMPERATURA.

em coordenadas retangulares, é dado por:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (6.4.17)$$

A solução da equação (6.4.16) fornece a distribuição de temperatura em escoamentos com as restrições consideradas, (escoamentos incompressíveis, com ρ , c e $K = \text{cte.}$) e sem dissipação de energia mecânica por atrito viscoso e não há geração interna de calor.

Nesses escoamentos, quando a viscosidade do fluido não depende da temperatura, pode-se resolver as eqs. diferenciais do mov. independentemente da eq. de transporte de calor.

Essas situações podem ocorrer em casos de convecção forçada.

Em termos da derivada material a Eq. (6.4.16) pode ser escrita como:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T \quad (6.4.18)$$

onde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$ (operador derivada material) (6.4.19)

Para escoamentos isobáricos, com calor específico e condutividade térmica constantes, e onde não ocorre dissipação de energia mecânica por atrito viscoso e não há geração de energia interna a eq. diferencial de transporte de calor fica modificada por:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K \nabla^2 T \quad \text{em que} \quad \alpha = \frac{K}{\rho c_p} \quad (\text{difusividade})$$

⇒ $\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$ (eq. de difusão de calor) → Cap. 9! 12

CAP. 7 - INTRODUÇÃO À TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

FW, 22/11/2023

CALOR pode ser definido como a ENERGIA QUE É TRANSFERIDA em função de uma diferença de temperatura. A termodinâmica estuda as relações entre as propriedades de um sistema e as trocas de calor e trabalho com a vizinhança, fornecendo informações sobre a quantidade de energia (calor) envolvida para o sistema passar de um estado inicial a um estado final num dado processo termodinâmico.

A transferência de calor é a área da ciência que estuda os mecanismos de transporte de calor e a determinação das distribuições de temperatura e dos fluxos (taxas de transferência) de calor.

Existem três mecanismos de transferência de calor: CONDUÇÃO, CONVECÇÃO e RADIAÇÃO. Vamos caracterizá-los e apresentar as eqs. que fornecem as densidades de fluxo de calor p/ estes três modos de transferência.

Fluxo de calor \rightarrow Quantidade de calor transferida através de uma superfície/s
Densidade de fluxo de calor \rightarrow taxa de transferência de calor por

7.2 - CONDUÇÃO

O MECANISMO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO SE CARACTERIZA PELA TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA TÉRMICA EM UM MEIO MATERIAL SÓLIDO OU FLUIDO, CAUSADA PELA EXISTÊNCIA DE UM GRADIENTE DE TEMPERATURA.

Verifica-se, experimentalmente, que a densidade de fluxo de calor por condução é diretamente proporcional ao gradiente de temperatura. Para um processo unidimensional de condução, na direção x , pode-se escrever:

$$q_x = -k \frac{dT}{dx}$$

fluxo de calor no sentido contrário ao gradiente de temperatura. (7.2.1)

em que:

ou $\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$ (Lei de Fourier / condução de calor)

- q_x → densidade de fluxo de calor por condução na direção x ;
- $\frac{dT}{dx}$ → gradiente de temperatura na direção x ; e
- k → condutividade térmica do material (capacidade do meio de conduzir calor)

A densidade de fluxo de calor é a taxa de transferência de calor por unidade de área, tal que:

$$\frac{\dot{Q}_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (7.2.2)$$

- \dot{Q} → fluxo de calor por condução na direção x ;
- A → área da seção normal ao fluxo de calor.

7.3 - CONVECÇÃO

O mecanismo de convecção se caracteriza pela transferência de calor causada pelo deslocamento de massa fluida.

Num fluido em movimento, onde existe distribuição não uniforme de temperatura, o calor é transferido pelo transporte de massa fluida e, também, por condução devido aos gradientes de temperatura.

CONVECÇÃO FORÇADA → ventiladores ou bombas;

CONVECÇÃO NATURAL (livre) → forças de empuxo devido aos gradientes de massa específica produzidos pelas diferenças de temperatura no fluido.

(p/ um escoamento)

CAMADA limite HIDRODINÂMICA ⇒ junto à superfície sólida (gradientes de velocidade) mais distante a velocidade é uniforme

(analogamente)

CAMADA limite térmica ⇒ junto à superfície sólida (gradientes de temperatura) mais distante da superfície sólida a temperatura é uniforme.

Consideremos uma situação de transferência de calor, por convecção forçada, de uma placa sólida aquecida, cuja superfície é mantida à temperatura T_s constante, para um fluido adjacente que possui temperatura T_∞ , conforme é apresentado no esquema da Fig. 7.1.

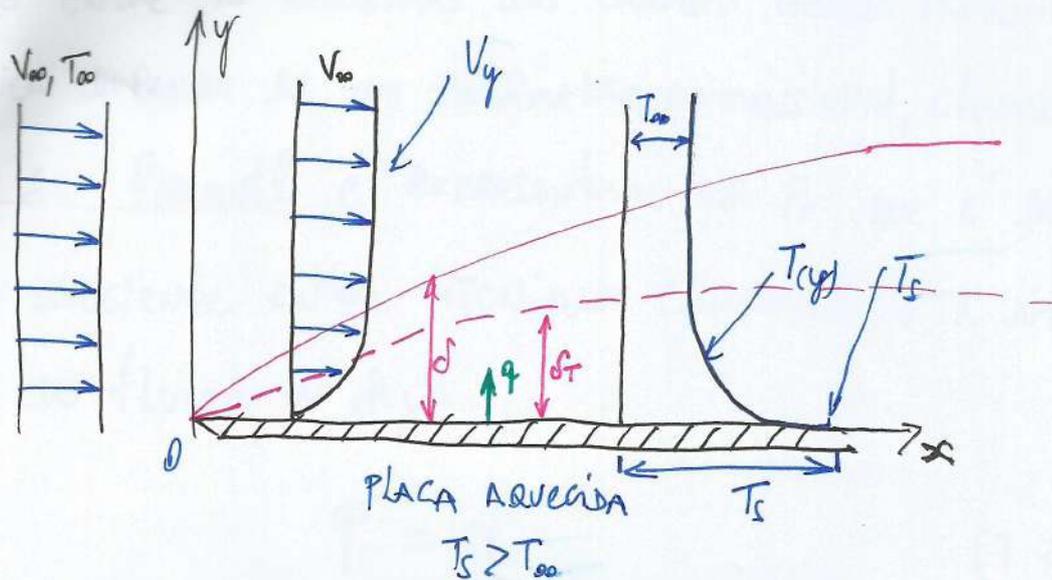


fig. 7.1 - Esquema da transferência de calor por convecção forçada de uma placa aquecida e um fluido.

Devido à propriedade de aderência dos fluidos viscosos às superfícies sólidas, existe uma película fluida em repouso aderida à placa, de forma que nessa película, onde a velocidade de escoamento é nula, o calor é transferido somente por condução.

A influência retardadora que a placa exerce sobre o movimento das partículas fluidas se propaga à medida que o fluido escoa sobre a superfície sólida, de maneira que a espessura δ da camada limite hidrodinâmica aumenta em função da coordenada x que tem origem no bordo de ataque da placa.

Quando a superfície da placa e o escoamento livre do fluido possuem temperaturas diferentes, ocorre o desenvolvimento de uma camada limite térmica com espessura δ_T que aumenta à medida que o fluido escoa sobre a superfície sólida.

A relação entre as espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica depende de um parâmetro adimensional, chamado de Número de Prandtl e representado por Pr , que é definido como o quociente entre viscosidade cinemática e a difusividade térmica do fluido, ou seja:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (7.3.1)$$

Com o conhecimento da condutividade térmica do fluido e do gradiente de temperatura da película fluida que fica aderida à superfície sólida, pode-se, por meio da eq. de Fourier e/ou a condução, determinar a densidade de fluxo de calor que é transferida da placa e/ou o fluido. Ao considerar um eixo y , perpendicular à placa, com origem na superfície sólida, tem-se:

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (7.3.2)$$

em que:

- $q \rightarrow$ densidade de fluxo de calor por condução na película fluida aderida à placa; e
- $k \rightarrow$ condutividade térmica do fluido.

NA SITUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO FORÇADA DE UMA PLACA AQUECIDA PARA UM FLUIDO (fig. 7.1) TEM-SE UMA REGIÃO, JUNTO À SUPERFÍCIE SÓLIDA, NA QUAL O FLUIDO ESTÁ EM MOVIMENTO E APRESENTA UMA DISTRIBUIÇÃO NÃO-UNIFORME DE TEMPERATURA, DE FORMA QUE O MECANISMO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO COMPREENDE A TRANSFERÊNCIA DE CALOR ASSOCIADA AO DESLOCAMENTO DE MASSA FLUIDA E A CONDUÇÃO DE CALOR DEVIDO AO GRADIENTE DE TEMP. NO FLUIDO.

A DENSIDADE DE FLUXO DE CALOR POR CONVECÇÃO É DIRETAMENTE PROPORCIONAL À DIFERENÇA ENTRE AS TEMPERATURAS DA SUPERFÍCIE SÓLIDA E DO FLUIDO, E É DETERMINADA POR MEIO DA EQ. CONHECIDA COMO A LEI DE NEWTON q O RESTRIAMENTO:

$$q = h (T_s - T_{\infty}) \quad (7.3.3)$$

EM QUE:

$q \rightarrow$ DENSIDADE DE FLUXO DE CALOR POR CONVECÇÃO;

$T_s \rightarrow$ TEMPERATURA DA SUPERFÍCIE SÓLIDA;

$T_{\infty} \rightarrow$ TEMP. DO FLUIDO;

$h \rightarrow$ COEF. DE TRANSF. DE CALOR POR CONVECÇÃO
(COEFICIENTE DE PELÍCULA).

O coef. h geralmente depende do tipo de escoamento, da geometria do sistema, das propriedades do fluido, do tipo de convecção (forçada ou natural) e da posição ao longo da superfície.

Quando o coef. h varia com a posição ao longo da superfície, pode-se considerar um coeficiente médio \bar{h} p/ toda a superfície como:

$$\bar{h} = \frac{1}{A} \int\int_{\text{ÁREA}} h \, dA \quad (7.3.4)$$

Assim, $\dot{Q} = A \bar{h} (T_s - T_{\infty})$, em que (7.3.5)

$\dot{Q} \rightarrow$ fluxo de calor por convecção;

$A \rightarrow$ área da superfície

Geralmente, os problemas de transferência convectiva de calor são tão complicados que o coef. de transferência de calor por convecção h só pode ser determinado analiticamente p/ casos simples.

$$h = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_s - T_{\infty})} \quad (7.3.6)$$

7.4 - RADIAÇÃO

A transferência de calor por radiação consiste no transporte de energia por radiação térmica. Uma das características do mecanismo de radiação é que, além de não necessitar de um meio material p/ a transferência de calor, o transporte de energia tem eficiência máxima através do vácuo absoluto.

Qualquer superfície com temperatura acima de zero Kelvin emite radiação térmica. Define-se como corpo negro uma superfície que absorve totalmente a radiação que incide sobre ela. Um radiador ideal (corpo negro) emite radiação térmica com uma densidade dada pela lei de

Stefan-Boltzmann:

$$q = \sigma T^4 \quad (7.4.1)$$

em que:

$q \rightarrow$ densidade de fluxo de energia radiante emitida pela superfície;

$\sigma \rightarrow$ constante de Stefan-Boltzmann;

$T_s \rightarrow$ temperatura absoluta da superfície;

As superfícies reais emitem menos energia: $q = \epsilon \sigma T_s^4$.

$\epsilon \rightarrow$ emissividade da superfície

A análise da troca de calor por radiação entre duas superfícies é, geralmente, bastante complexa. Consideremos um caso ideal mais simples, que consiste em duas superfícies negras planas e paralelas, de dimensões infinitas com temperaturas absolutas T_1 e T_2 , respectivamente. Se o meio entre as placas não absorve radiação térmica, tem-se que:

$$q = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (7.4.3)$$

Também devemos considerar fatores geométricos, além de que a maioria dos materiais não são corpos negros (considerar fatores de absorção e emissão).

7.5 - Mecanismos combinados de transferência de calor.

geralmente, nas situações reais de transmissão de calor estão envolvidos dois ou três mecanismos, mas em alguns casos pode acontecer que um ou dois modos de transferência sejam pouco significativos.

Estudaremos a condução de calor e mecanismos combinados de condução com convecção no contorno.

CAP. 8 - INTRODUÇÃO À CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME PERMANENTE.

8.2. - CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR ATRAVÉS DE PAREDE DE UMA CAMADA.

8.2.1 - PAREDE PLANA DE UMA CAMADA.

CONSIDEREMOS A PAREDE PLANA, DE ESPESSURA L e constituída de um material com condutividade térmica K constante, que é mostrada no esquema da fig. 8.1.

AS SUPERFÍCIES DA PAREDE SÃO MANTIDAS ÀS TEMPERATURAS T_0 e T_L , constantes, SENDO $T_0 > T_L$. TRATAREMOS DA DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR e DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NA PAREDE.

NA DIREÇÃO x , temos:

$$\frac{\dot{Q}_x}{A} = -K \frac{dT}{dx} \quad (8.2.1.1)$$

COM AS C.C.:

$$\begin{cases} p/ x=0 \Rightarrow T(0) = T_0 \\ p/ x=L \Rightarrow T(L) = T_L \end{cases}$$

O regime é permanente, de maneira que $\dot{Q}_x = \text{cte.}$

$$K \text{ é INVARIÁVEL e } A = \text{cte.} \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{A} \int_0^L dx = -K \int_{T_0}^{T_L} dT$$

Resultando num fluxo de calor: $\dot{q} = \frac{KA}{L} (T_0 - T_L)$.

A distribuição (perfil) de temperatura $T(x)$ NA PAREDE pode ser obtida DA INTEGRAÇÃO DA eq. (8.2.1.1) CONSIDERANDO A 2ª C.C. P/ UMA COORDENADA x GÊNÉRICA, ou seja,

P/ $x = x$, tem-se $T = T(x)$, tal que:

$$\frac{\dot{q}}{A} \int_0^x dx = -K \int_{T_0}^{T(x)} dT$$

$$T(x) = T_0 - \frac{\dot{q} x}{KA} \quad \text{P/ } 0 \leq x \leq L \quad (8.2.1.5)$$

ASSIM, PARA UMA PAREDE PLANA COM AS CONDIÇÕES CONSIDERADAS tem-se UMA DISTRIBUIÇÃO LINEAR de temperatura.

(NÃO PRECISA)

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA P/ A DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO de temperatura é A INTEGRAÇÃO DA eq. de difusão de calor:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{ou} \quad (8.2.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

NÃO HÁ VARIACÃO de temperatura NO PLANO xy (fig. 8.1), de forma que

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

que tem sol. geral dada por:

$$T(x) = ax + b \quad (8.2.1.9)$$

Com as c.c. $\begin{cases} p/x=0 \Rightarrow T(0) = T_0 ; \\ p/x=L \Rightarrow T(L) = T_L . \end{cases}$

AO APLICAR AS CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SOL. GERAL, OBTÉM-SE:

$$b = T_0 \quad e \quad a = \frac{T_L - T_0}{L} \quad (8.2.1.10b)$$

RESULTANDO A SOLUÇÃO: $T(x) = \left(\frac{T_L - T_0}{L}\right)x + T_0$

$$\boxed{T(x) = T_0 - \frac{(T_0 - T_L)x}{L}} \quad (8.2.1.12)$$

A DENSIDADE DE FLUXO DE CALOR É DETERMINADA POR MEIO DA EQ. DE FOURIER P/ A CONDUÇÃO, DADA POR:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = -k \cdot \frac{dT}{dx} \quad , \quad \text{de forma que:}$$

$$\frac{\dot{Q}}{A} = -k \left[-\frac{(T_0 - T_L)}{L} \right] \Rightarrow \dot{Q} = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L)$$

Portanto $T_0 - T_L = \frac{\dot{Q}_x \cdot L}{kA}$, logo:

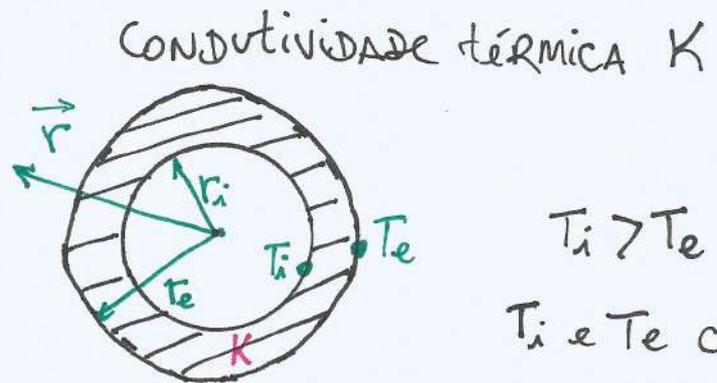
$$\boxed{T(x) = T_0 - \frac{\dot{Q}_x x}{kA}}$$

(8.2.1.17)

8.2.2 - PAREDE CILÍNDRICA DE UMA CAMADA COM CONDUÇÃO NA DIREÇÃO RADIAL.

CONSIDERAÇÕES:

- RAIO INTERNO r_i
- RAIO EXTERNO r_e
- COMPRIMENTO L



$$T_i > T_e$$

$$T_i \text{ e } T_e \text{ ctes.}$$

Eq. de FOURIER (RADIAL):

$$\frac{\dot{Q}_r}{A} = -K \frac{dT}{dr}$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{PARA } r = r_i, \text{ tem-se } T(r_i) = T_i \\ \text{PARA } r = r_e, \text{ tem-se } T(r_e) = T_e \end{array} \right.$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \frac{\dot{Q}_r}{2\pi r L} dr = - \int_{T_i}^{T_e} K dT$$

O FLUXO DE CALOR NA
DIREÇÃO RADIAL É CTE.

$$\dot{Q}_r \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = -2\pi K L \int_{T_i}^{T_e} dT$$

$$\dot{Q}_r [\ln(r_e) - \ln(r_i)] = + 2\pi K L (T_i - T_e)$$

$$\dot{Q}_r \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = 2\pi K L (T_i - T_e)$$

$$\dot{Q}_r = \frac{2\pi K L (T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} \quad \left(\text{FLUXO DE CALOR POR CONDUÇÃO NA DIR. RADIAL.} \right)$$

A distribuição de temperatura $T(r)$, é obtida ao CONSIDERAR A 2ª C.C. P/ UMA COORDENADA GÊNÉRICA r . Ou seja,

$$\text{p/ } r = r, \text{ tem-se } T = T(r)$$

$$\text{SENDO } \dot{Q}_r \int_{r_i}^r \frac{dr}{r} = -2\pi K L \int_{T_i}^{T(r)} dT$$

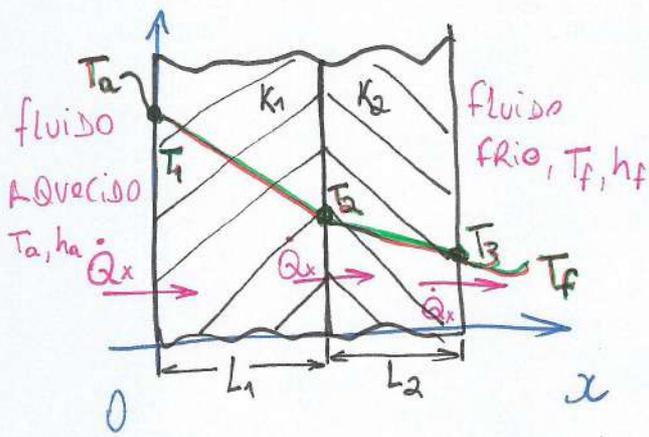
$$\dot{Q}_r \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) = 2\pi K L [T_i - T(r)]$$

$$\frac{\dot{Q}_r \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{2\pi K L} = T_i - T(r)$$

$$T(r) = T_i - \frac{\dot{Q}_r \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{2\pi K L}$$

8.3 - CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR, em regime permanente, através de parede composta com convecção no contorno.

8.3.1 - PAREDE PLANA COMPOSTA.



T_a e T_f são constantes
(regime permanente) com $T_a > T_f$.
fluxo de calor $\dot{Q}_x = \text{cte}$.

USAR: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Lei de Fourier p/ condução e} \\ \text{Lei de Newton p/ resfriamento} \end{array} \right.$

$$\dot{Q}_x = h_a A (T_a - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1} (T_1 - T_2) = \frac{k_2 A}{L_2} (T_2 - T_3) = h_f A (T_3 - T_f)$$

As diferenças de temperatura são obtidas por:

$$(T_a - T_1) = \dot{Q}_x \left(\frac{1}{h_a A} \right)$$

$$(T_1 - T_2) = \dot{Q}_x \left(\frac{L_1}{k_1 A} \right)$$

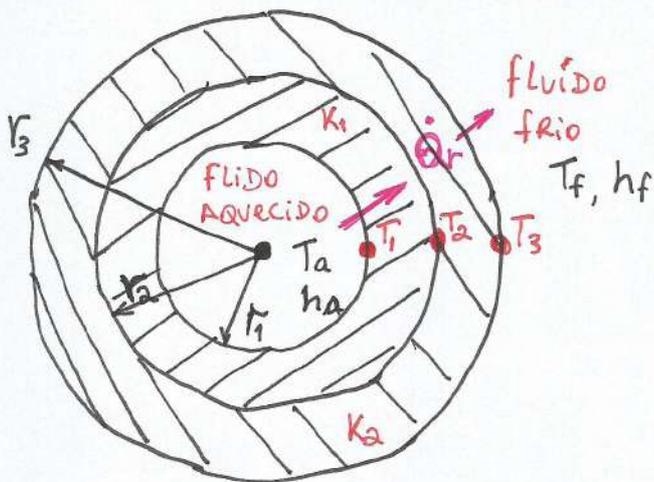
$$(T_2 - T_3) = \dot{Q}_x \left(\frac{L_2}{k_2 A} \right)$$

$$(T_3 - T_f) = \dot{Q}_x \left(\frac{1}{h_f A} \right)$$

$$(T_a - T_f) = \dot{Q}_x \left(\frac{1}{h_a A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_f A} \right)$$

$$\dot{Q}_x = \frac{T_a - T_f}{\frac{1}{h_a A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_f A}}$$

8.3.2 - Parede cilíndrica composta COM CONDUÇÃO NA DIREÇÃO RADIAL.



T_a e T_f SÃO CONSTANTES
 (REGIME PERMANENTE)
 $\dot{Q}_r = \text{cte}$ (RADIAL)

Lei de Fourier p/ a condução nas camadas sólidas e
 Lei de Newton p/ o resfriamento p/ a convecção entre
 as camadas sólidas e fluidos.

$$\dot{Q}_r = 2\pi r_1 L h_a (T_a - T_1) = \frac{2\pi L K_1 (T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L K_2 (T_2 - T_3)}{\ln(r_3/r_2)} = 2\pi r_3 L h_f (T_3 - T_f)$$

Diferença de temperatura

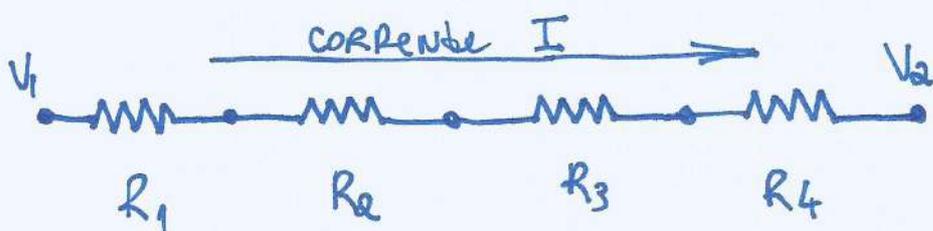
$$\begin{aligned}
 (T_a - T_1) &= \dot{Q}_r \left(\frac{1}{2\pi r_1 L h_a} \right) \\
 (T_1 - T_2) &= \dot{Q}_r \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L K_1} \right] \\
 (T_2 - T_3) &= \dot{Q}_r \left[\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L K_2} \right] \\
 (T_3 - T_f) &= \dot{Q}_r \left(\frac{1}{2\pi r_3 L h_f} \right)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (T_a - T_1) \\ (T_1 - T_2) \\ (T_2 - T_3) \\ (T_3 - T_f) \end{aligned}} \right\} \frac{(T_a - T_f)}{\dot{Q}_r} = \left[\frac{1}{2\pi r_1 L h_a} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L K_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L K_2} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_f} \right]$$

$$\dot{Q}_r = \frac{(T_a - T_f)}{2\pi L \times \left[\frac{1}{r_1 L h_a} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{K_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{K_2} + \frac{1}{r_3 L h_f} \right]}$$

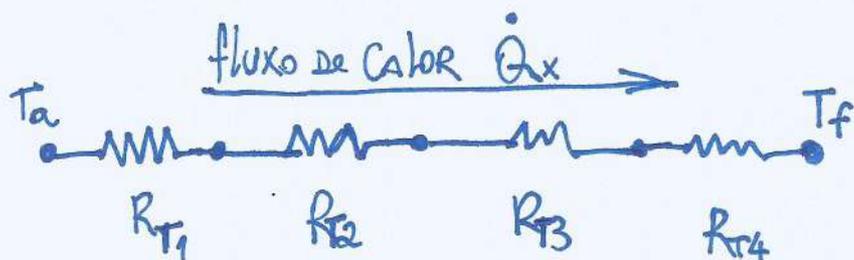
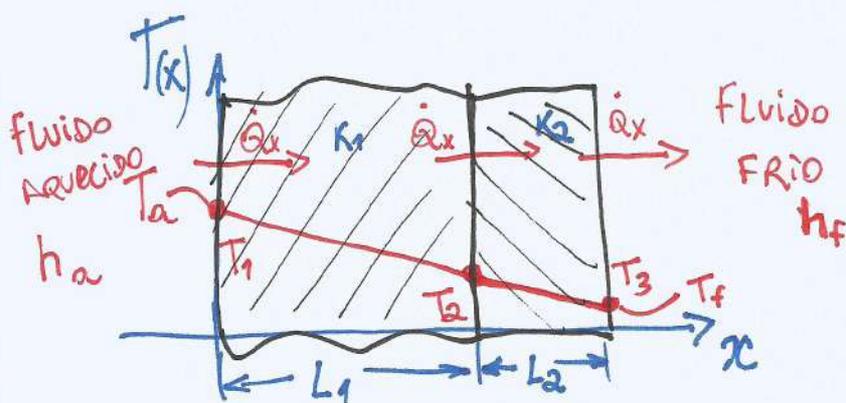
8.4. Conceito de Resistência Térmica

Observa-se uma analogia entre o fluxo de calor num meio material e a corrente eléctrica num fio condutor.

sendo $R = \frac{\Delta V}{I}$, ao considerar resistências em série:



$$I = \frac{\Delta V}{\sum_{i=1}^4 R_i}$$



O fluxo de calor \dot{Q}_x , sabemos que é:

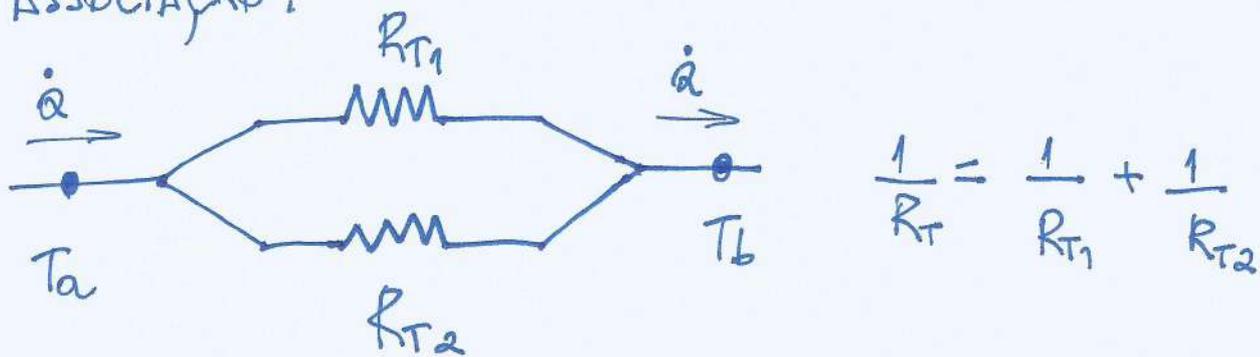
$$\dot{Q}_x = \frac{T_a - T_f}{\frac{1}{h_a A} + \frac{L_1}{K_1 A} + \frac{L_2}{K_2 A} + \frac{1}{h_f A}}$$

de forma análoga:

$$\text{Logo: } \begin{cases} R_{T, \text{convecção}} = \frac{1}{hA} \\ R_{T, \text{condução}} = \frac{L}{KA} \end{cases}$$

$$\dot{Q}_x = \frac{\Delta T}{\sum R_T}$$

EM ALGUMAS SITUAÇÕES PODE-SE TER UMA PAREDE COMPOSTA DE CAMADAS COLOCADAS EM PARALELO SUBMETIDAS À MESMA DIFERENÇA DE TEMPERATURA. PARA UMA SITUAÇÃO DE DUAS CAMADAS EM PARALELO PODEMOS FAZER A SEGUINTE ASSOCIAÇÃO:



$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}}$$

Sabemos que:
$$\dot{Q}_r = \frac{T_a - T_f}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_a} + \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi L K_1} + \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi L K_2} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_b}}$$

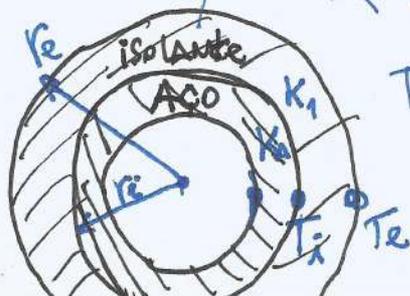
DE FORMA ANALÓGICA, PODEMOS DEFINIR AS RESISTÊNCIAS TÉRMICAS PARA A TRANSFERÊNCIA DE CALOR ATRAVÉS DE PAREDE CILÍNDRICA NA DIREÇÃO RADIAL:

$$R_{T, \text{convecção}} = \frac{1}{2\pi r L h} \quad \text{e} \quad R_{T, \text{condução}} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi L K}$$

8.5 - RAIO CRÍTICO DE ISOLAMENTO.

Em muitas situações práticas, os dutos cilíndricos são revestidos com uma camada de isolante para reduzir a perda de calor para o ambiente. Ao analisar as eqs.: (8.5.1) e (8.5.2) observa-se que, para um sistema com as mesmas condições térmicas, um acréscimo na espessura da camada de isolante (aumento do raio externo) diminui a resistência térmica de convecção e aumenta a resistência térmica de condução, de forma que p/ algumas situações o acréscimo na espessura de isolamento sobre um duto cilíndrico pode aumentar o fluxo de calor (perda de calor p/ o ambiente).

* Considere uma camada de isolante, com raio interno r_i e raio externo r_e e constituída por um material com condutividade térmica K_1 , colocada sobre um duto cilíndrico que perde calor p/ o ar ambiente, conforme a figura:



T_{∞} ambiente
 h

SENDO: $\dot{Q}_r = \frac{\Delta T}{\Sigma R_i} = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L K_1} + \frac{1}{2\pi r_e L h}}$

Um ACRÉSCIMO NO RAIO externo r_e AUMENTA A RESISTÊNCIA térmica DE CONDUÇÃO e DIMINUI A RESISTÊNCIA térmica DE CONVECÇÃO.

Existe um RAIO CRÍTICO de isolamento r_{ec} , p/o qual o fluxo de calor \dot{Q}_r é MÁXIMO. PORTANTO:

$\left. \frac{d\dot{Q}_r}{dr_e} \right|_{r_e=r_{ec}} = 0$, REGRAS DA CADENA:

$\left[\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right]$ ONDE

$u = \frac{1}{2\pi L r_e h} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L K_1}$

$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2}$

IMPRIMIR

$\Rightarrow (T_i - T_\infty) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2\pi r_e L h} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L K_1} \right] \right] = 0$

... (VER PÁG. DO CÁLCULO COMPLETO)

$\therefore \frac{-2\pi L (T_i - T_\infty)}{\left[\frac{\ln(r_{ec}/r_i)}{K_1} + \frac{1}{h r_{ec}} \right]^2} \cdot \left(\frac{1}{K_1 r_{ec}} - \frac{1}{h r_{ec}^2} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{r_{ec} = \frac{K_1}{h}}$
 (RAIO CRÍTICO DE ISOLAMENTO)

CAP. 9 - INTRODUÇÃO À CONDUÇÃO DE CALOR em regime transiente.

9.2 - EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR

A eq. geral da condução de calor em coordenadas Retangulares, escrita de forma compacta, é dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{q}(x, y, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\dot{q}(x, y, z, t)$ \Rightarrow taxa de geração de calor por unidade de vol.

ONDE $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ e

$$\vec{\nabla} \cdot T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}$$

A sol. da equação diferencial da condução de calor, submetida às condições de contorno e inicial do problema, fornece a distribuição de temperatura.

CASOS PARTICULARES DA Eq. DA CONDUÇÃO DE CALOR.

a) CONDUTIVIDADE TÉRMICA K CONSTANTE.

PARA AS SITUAÇÕES em que $K = \text{cte.}$, temos que:

$$\nabla^2 T + \dot{q}(x, y, z, t) \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ em que}$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (\text{DIFUSIVIDADE TÉRMICA})$$

$\alpha \rightarrow$ INDICA A RELAÇÃO ENTRE A CAPACIDADE DO MATERIAL em TRANSFERIR CALOR POR CONDUÇÃO e CAPACIDADE e ARMAZENAR ENERGIA TÉRMICA.

b) CONDUTIVIDADE TÉRMICA cte. e SEM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR

$$K = \text{cte.} \quad \text{e} \quad \dot{q}(x, y, z, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (\text{eq. de DIFUSÃO DE CALOR})$$

c) $K = \text{cte.}$ e $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (COM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR).

A eq. GERAL DA CONDUÇÃO DE CALOR \Rightarrow

$$\nabla^2 T + \dot{q}(x, y, z, t) \frac{1}{k} = 0$$

fica:

d) CONDUÇÃO EM REGIME PERMANENTE, COM $K = \text{cte.}$
E SEM GERAÇÃO INTERNA DE CALOR.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 T = 0} \quad (\text{eq. de LAPLACE})$$

TRATA-SE DE UM CURSO INTRODUTÓRIO, IREMOS ESTUDAR APENAS O CASO (b), OU SEJA, SOMENTE A eq. DA DIFUSÃO DE CALOR,

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (\text{COORDENADAS RETANGULARES})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (\text{COORDENADAS CILÍNDRICAS})$$

9.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAL P/A DIFUSÃO DE CALOR

9.3.1 - CONDIÇÃO INICIAL

No instante inicial, geralmente, $t = 0$, portanto:

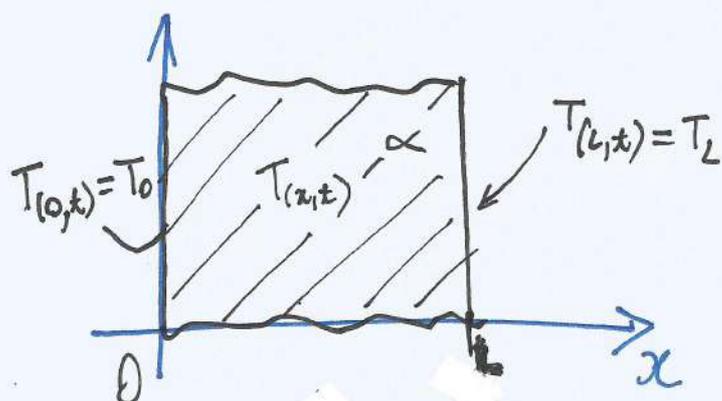
$$T(x, y, z, t=0) = T_0(x, y, z).$$

9.3.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.

De uma maneira geral, as condições de contorno podem ser classificadas em três tipos:

- * CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TEMPERATURA PRESCRITA;
 - * CONDIÇÃO DE CONTORNO DE FLUXO PRESCRITO; e
 - * CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO.
- É importante observar que essas condições de contorno, que descrevem situações físicas na fronteira da região de definição do problema de difusão de calor, devem ser satisfeitas pela sol. da eq. diferencial do caso em estudo em \forall instante de tempo $t > 0$.

* CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TEMP. PRESCRITA



A eq. de difusão fica:

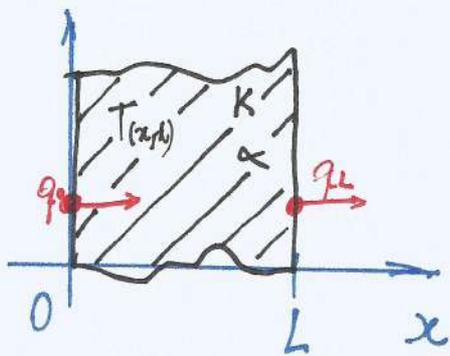
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{p/} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$T(0,t) = T_0 \quad \text{p/} \quad \begin{cases} x = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$T(L,t) = T_L \quad \text{p/} \quad \begin{cases} x = L \\ t > 0 \end{cases}$$

(ANÁLOGO AOS PROB. DO
CAP. 2. (PROBLEMAS 03 e 04))

* CONDIÇÃO DE CONTORNO DE FLUXO PRESCRITO.



$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{p/} \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{cases}$$

DA eq. de FOURIER: $q_0 = -K \frac{\partial T(0,t)}{\partial x}$ e $q_L = -K \frac{\partial T(L,t)}{\partial x}$

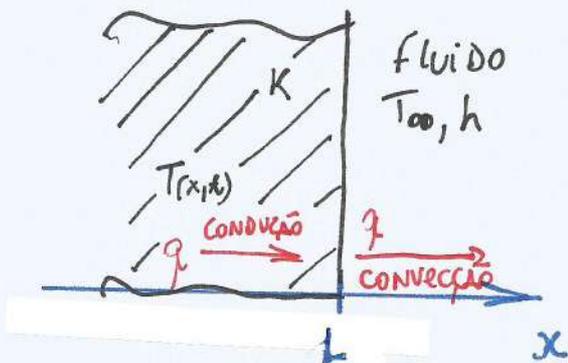
DE FORMA QUE, AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE FLUXO PRESCRITO SÃO DADAS POR:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = -\frac{q_0}{K} \quad \text{p/} \begin{cases} x=0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = -\frac{q_L}{K} \quad \text{p/} \begin{cases} x=L \\ t > 0 \end{cases}$$

* CONSIDERE UMA SUPERFÍCIE COM ISOLAMENTO TÉRMICO PERFEITO. DE FORMA QUE O FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE É NULO. NESTA SITUAÇÃO, QUANTO É O ∇T NORMAL À SUPERFÍCIE DE CONTORNO? ZERO.

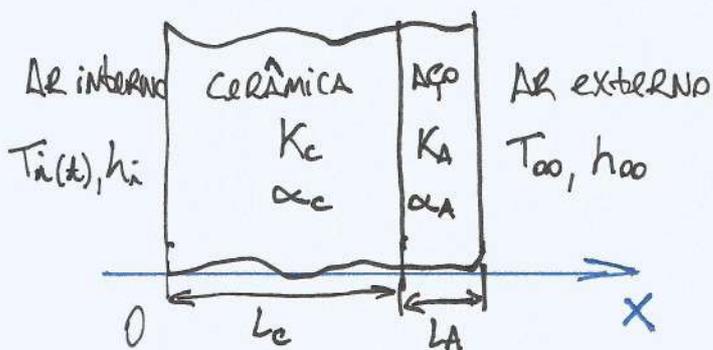
* CONDIÇÕES DE CONTORNO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO



$$-K \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h [T(L,t) - T_{\infty}]$$

$$p/ \begin{cases} x=L \\ t > 0 \end{cases}$$

* CONDIÇÕES DE CONTORNO NA JUNÇÃO DE DUAS CAMADAS SÓLIDAS.



A distribuição da temperatura na camada cerâmica é a sol. da eq.:

$$\frac{\partial^2 T_c(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial T_c(x,t)}{\partial t} \quad p/ \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t > 0 \end{cases}$$

e p/ a camada de aço, é:

$$\frac{\partial^2 T_A(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_A} \frac{\partial T_A(x,t)}{\partial t} \quad p/ \begin{cases} L_c \leq x \leq (L_c + L_A) \\ t > 0 \end{cases}$$

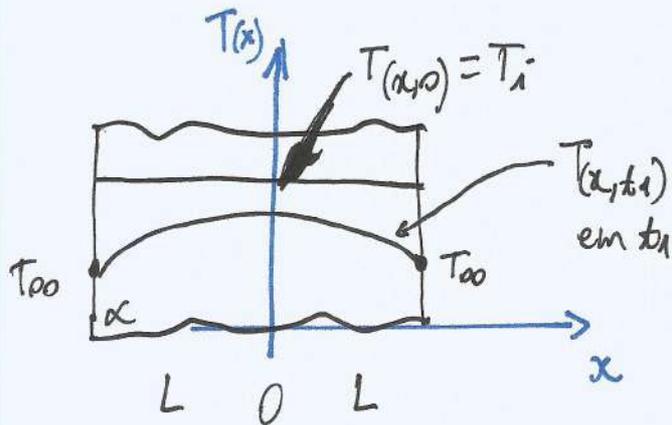
Na junção das camadas sólidas, em $x = L_c$, têm-se

as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} T_c(L_c,t) = T_A(L_c,t) \\ K_c \frac{\partial T_c(L_c,t)}{\partial x} = K_A \frac{\partial T_A(L_c,t)}{\partial x} \end{cases} \quad p/ \begin{cases} x = L_c \\ t > 0 \end{cases}$$

9.4 - Solução analítica de um problema transiente UNIDIMENSIONAL de difusão de calor.

Exemplo 9.4



PARÂMETRO ADMENSIONAL

$$\text{Nº de Biot: } Bi = \frac{hL}{K}$$

QUANDO $Bi \gg 1$, INDICA QUE A TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR

CONVECÇÃO ENTRE A SUPERFÍCIE SÓLIDA E O FLUIDO É MUITO MAIOR QUE A CONDUÇÃO DE CALOR NO INTERIOR DA PLACA, NO MESMO INTERVALO DE TEMPO.

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{p/} \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{cases}$$

CONDIÇÃO INICIAL $T(x,0) = T_i$ p/ $\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t = 0 \end{cases}$

C.C. : $\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$ p/ $\begin{cases} x = 0 \\ t > 0 \end{cases}$

e $\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = T_{oo}$ p/ $\begin{cases} x = L \\ t > 0 \end{cases}$

É conveniente realizar uma transformação de variável, considerando a temperatura relativa $\theta(x,t)$, definida como

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_{\infty}, \text{ portanto}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \quad \text{p/} \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Com C.I.: } \theta(x,0) = \theta_i \quad \text{p/} \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t = 0 \end{cases}$$
$$\theta_i = T_i - T_{\infty}$$

$$\text{e C.C.: } \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{p/} \begin{cases} x = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\theta(L,t) = 0 \quad \text{p/} \begin{cases} x = L \\ t > 0 \end{cases}$$

VAMOS USAR O MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

$$\text{Sol. } \theta(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\Rightarrow T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{X(x)}{\alpha} \frac{dT(t)}{dt} \quad (\div X(x)T(t))$$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\lambda^2$$

Assim, teremos duas eqs. diferenciais:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dT(t)}{dt} + \alpha \lambda^2 T(t) = 0$$

Com soluções; ~~respectivamente~~:

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad \text{que deve satisfazer as c.c.}$$

$$\text{DADAS POR } \frac{dX(0)}{dx} = 0 \quad \text{e} \quad X(L) = 0.$$

$$T(t) = C e^{-2\lambda^2 t}, \quad \text{A c.i. fica: } X(x)T(0) = \Theta_i$$

AO APLICAR A CONDIÇÃO DE CONTORNO P/ $x=0$, obtém-se

$$\frac{dX(0)}{dx} = -A\lambda \sin(0) + B\lambda \cos(0) = 0$$

$$\implies B = 0$$

AO APLICAR A C.C. P/ $x=L$, SENDO $B=0$, TEMOS

$$X(L) = A \cos(\lambda L) = 0, \quad A \neq 0$$

$$\implies \cos(\lambda L) = 0, \quad \text{Logo } \lambda_n L = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$\implies \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \longrightarrow \text{Autovalores do prob.} \quad 09$$

Assim, têm-se as autofunções :

$$X_n(x) = A_n \cos(\lambda_n x) \quad , \quad e$$

$$T_n(t) = C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

tal que $\theta_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$

Como temos eqs. diferenciais lineares, a combinação linear também é solução. Sendo assim, podemos escrever:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cdot \cos(\lambda_n x) \quad ; \quad \text{com } a_n = C_n A_n$$

que é determinado ao aplicar a C.I.

$$\theta(x,0) = \theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^0 \cos(\lambda_n x)$$

$$\implies \theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x)$$

Temos uma expansão em série de Fourier, tal que

$$a_n = \frac{\int_0^L \theta_i \cos(\lambda_n x) dx}{\int_0^L \cos^2(\lambda_n x) dx}$$

$$a_n = \frac{\theta_i \cdot \sin(\lambda_n L)}{\frac{L}{2} + \frac{\sin(2\lambda_n L)}{4\lambda_n}}, \quad \text{sendo } \lambda_n L = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

De forma que $\sin(\lambda_n L) = (-1)^{n-1}$

$$\text{e } \sin(2\lambda_n L) = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2\theta_i}{\lambda_n L} (-1)^{n-1}$$

Assim, a sol. da eq. $\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x)$

ou seja, a temperatura relativa fica sendo

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta_i}{\lambda_n L} (-1)^{n-1} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cdot \cos(\lambda_n x)$$

$$\text{Como } \theta(x,t) = T(x,t) - T_{\infty} \quad \text{e} \quad \theta_i = T_i - T_{\infty}$$

$$\Rightarrow T(x,t) = T_{\infty} + \frac{2}{L} (T_i - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cdot \cos(\lambda_n x)$$

TRANSIENTE térmico! A distribuição de temp. NA PLACA, p/ $0 \leq x \leq L$.